DERIVATIONEN

UND

VERBANDSHALBGRUPPEN

Dissertation,
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard - Karls - Universität
zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
vorgelegt von

HEINRICH UHLIG
aus Greifswald

1979

DERIVATIONEN

UND

VERBANDSHALBGRUPPEN

Dissertation,
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard - Karls - Universität
zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
vorgelegt von

HEINRICH UHLIG
aus Greifswald

1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation: 20. 7. 1979

Dekan : Prof. Dr. H. Salzmann

1. Berichterstatter : Prof. Dr. R. Nagel

2. Berichterstatter : Prof. Dr. M. Wolff

PARA IVONNE

Más sencilla, más sencilla.
Sin barroquismo,
sin añadidos ni ornamentos,
que se vean desnudos
los maderos,
y decididamente rectos.
Los brazos en abrazo hacia la Tierra,
el ástil disparandose a los cielos.
Que no haya un solo adorno
que distraiga este gesto,
este equilibrio humano
de los dos mandamientos.
Más sencilla, más sencilla;
hazme una cruz sencilla, carpintero.

Leon Felipe

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

Präliminarien 8

Kapitel I: Zwei Probleme von S. Sakai 15

§1 Problem (I) 16

§2 Homomorphismen und Derivationen 29

§3 Zehn Beispiele 36

§4 Problem (II) - die Morphismenhalbgruppen auf C[0,1] 46

Kapitel II: Verbandshalbgruppen und ihre Erzeuger 60

§1 Differentiation der Betragsabbildung in Banachverbänden 63

§2 Verbandshalbgruppen auf Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm 74

§3 Verbandshalbgruppen auf reellen Banachverbänden 80

§4 Verbandshalbgruppen auf komplexen Banachverbänden 89

Kapitel III: Kompakte Verbandsgruppen und Verbandsgruppen mit kompakter Resolvente 96

§1 Morphismengruppen mit kompakter Resolvente 98

§2 Verbandsgruppen mit kompakter Resolvente 103

§3 Relativ kompakte, irreduzible Morphismengruppen 114

Literaturverzeichnis 118

E I N L E I T U N G

Einparametrige Gruppen auf (meist "endlichdimensionalen") Phasenräumen gehören sowohl in der Ergodentheorie als auch in der Topologischen Dynamik zu den zentralen und wichtigsten Objekten, werden jedoch unter unterschiedlichen Gesichtspunkten und Voraussetzungen analysiert. Die Ergodentheorie stützt sich vor allem auf die Maßtheorie, während die Grundlage der Topologischen Dynamik die topologischen Strukturen bilden. Beide Gebiete werden oft auch unter dem Namen "klassische Dynamik" zusammengefaßt.

Mit "moderner Dynamik" könnte man eine Reihe von Theorien bezeichnen, die sich mit (Halb)gruppen linearer, stetiger Abbildungen auf (unendlichdimensionalen) Banachräumen beschäftigen. Einparametrige (Halb)gruppen sind auch hier von fundamentaler Bedeutung.

Warum diese Einteilung in "klassisch" und "modern" , in welchem Verhältnis stehen diese beiden "Dynamiken" zueinander ?

Betrachten wir einmal die folgende Situation aus der topologischen Dynamik. Es sei K eine kompakte Teilmenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ und $\varphi: K \times \mathbb{R} \longrightarrow K$ ein stetiger Fluß. Dann bilden die Homöomorphismen $\varphi_t: K \longrightarrow K$, $p \longrightarrow \varphi(p,t)$ eine einparametrige

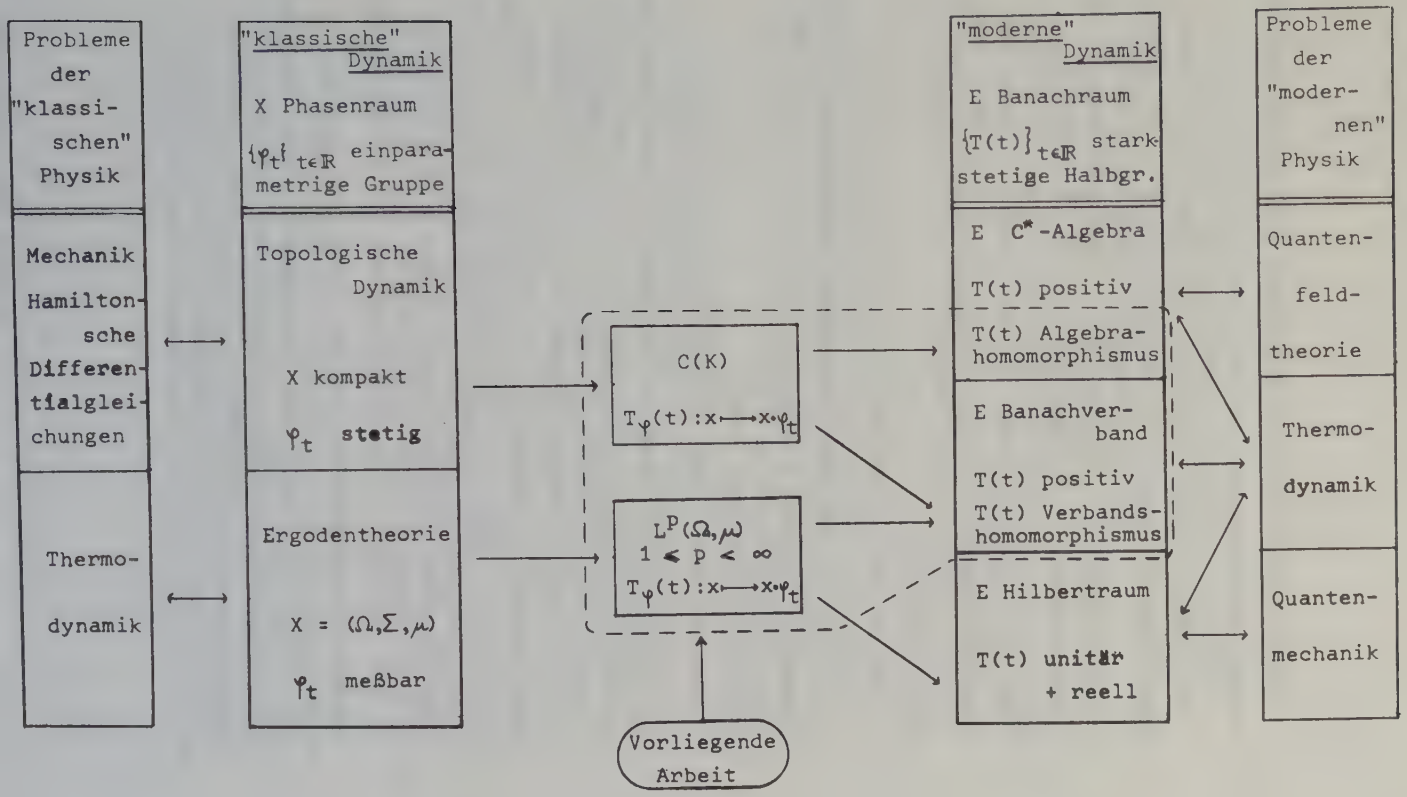
Gruppe auf dem Phasenraum K. Bezeichnet C(K) den Banachraum der stetigen, komplexwertigen Funktionen mit der Supremumsnorm, so wird durch die Zuordnung

$$T_\varphi(t): C(K) \longrightarrow C(K) \quad , \quad x \longmapsto x \circ \varphi_t \quad ,$$

eine starkstetige Gruppe $\{T_\varphi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ in $\mathcal{L}(C(K))$ erklärt. Sieht man C(K) als C^*-Algebra (Banachverband) an, so sind die Operatoren $T_\varphi(t)$ sogar *-Automorphismen (Verbandsisomorphismen), welche die Eins (Ordnungseins) in die Eins überführen. Während φ_t auf dem "endlichdimensionalen" Phasenraum "nur" eine stetige Abbildung war, ist $T_\varphi(t)$ ein "Morphismus" auf dem unendlichdimensionalen Vektorraum C(K). Mehr Struktur bei der Wirkung der Gruppe wird also durch eine "Vergrößerung" des Raumes erkauft.

Das Diagramm auf der nächsten Seite zeigt weitere Beispiele von "Einbettungen" der "klassischen" in die "moderne" Dynamik (unter Vernachlässigung aller technischen Schwierigkeiten).

Starkstetige Halbgruppen auf Banachräumen und insbesondere Gruppen unitärer Operatoren auf Hilberträumen werden zusammen mit ihren Erzeugern seit den vierziger Jahren, beginnend mit Arbeiten von Stone, von Neumann, Hille, Yosida u. a., ausgiebig untersucht. Die meisten "konkreten" Banachräume sind aber Funktionenräume (häufig


Probleme der "klassischen" Physik
"klassische" Dynamik
X Phasenraum
$\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ einparametrige Gruppe
Mechanik
Hamiltonsche Differentialgleichungen
Topologische Dynamik
X kompakt
φ_t stetig
Thermodynamik
Ergodentheorie
$X = (\Omega, \Sigma, \mu)$
φ_t meßbar
C(K)
$T_\varphi(t): x \longmapsto x \cdot \varphi_t$
$L^p(\Omega,\mu)$
$1 \leq p < \infty$
$T_\varphi(t): x \longmapsto x \cdot \varphi_t$
Vorliegende Arbeit
"moderne" Dynamik
E Banachraum
$\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ stark stetige Halbgr.
E C^*-Algebra
T(t) positiv
T(t) Algebrahomomorphismus
E Banachverband
T(t) positiv
T(t) Verbandshomomorphismus
E Hilbertraum
T(t) unitär + reell
Probleme der "modernen" Physik
Quantenfeldtheorie
Thermodynamik
Quantenmechanik

also auf natürliche Weise geordnet) und viele von ihnen sogar Banachverbände wie C(K) und die L^p- Räume (oder Banachalgebren wie C(K) und $\mathcal{L}(E)$). "Klassische" einparametrige Halbgruppen auf Banachalgebren und Banachverbänden vertauschen (oft) mit der algebraischen bzw. der Verbandsstruktur. Dieses in vielen Fällen vorhandene "Mehr an Struktur" wurde in der Literatur bisher nur ungenügend berücksichtigt - vor allem was die Banachverbände angeht.

Das ist der Ansatzpunkt der vorliegenden Arbeit.

Warum soll man aber "klassische" Halbgruppen in der "modernen" Dynamik untersuchen, läßt sich darüber noch etwas wirklich Neues sagen?

Die "moderne", die funktionalanalytische Betrachtungsweise bietet (neben der größeren Allgemeinheit) den Vorteil, daß jede C_o-Halbgruppe durch einen abgeschlossenen linearen Operator erzeugt wird (Hille - Yosida). Ähnlich wie ein Vektorfeld auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit Aufschluß über das topologische Verhalten "seines" Flusses gibt, ohne daß dieser explizit vorliegt , lassen sich aus den Eigenschaften des Generators Rückschlüsse auf die Halbgruppe ziehen. In der "modernen" Dynamik ist insbesondere jedem (stetigen) Fluß φ auf einem beliebigen Kompaktum ein "Vektorfeld" zugeordnet, nämlich der Erzeuger der von φ induzierten

Gruppe $\{T_\varphi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ (vgl. I.2.3 - I.2.6).

Die folgende Inhaltsübersicht wird durch ausführliche Kapiteleinleitungen über Motivation, Methode und Gegenstand der Untersuchung ergänzt.

In Kapitel I werden zwei Probleme von S. Sakai behandelt (genaue Formulierung siehe Seite 15). Bei dem ersten geht es um die Frage, ob eine auf dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(\delta) \subset C(K)$ einer abgeschlossenen $*$-Derivation δ definierte $*$-Derivation δ_1 abschließbar ist. Die positive Antwort (I.1.6 (ii)) wird hergeleitet, indem zunächst $\delta_1 = m\delta$ für eine beschränkte auf einer offenen, dichten Menge stetigen Funktion m gezeigt wird. Durch ihren Definitionsbereich wird eine abgeschlossene Derivation also schon weitgehend festgelegt.

Das zweite Problem fragt nach der Kennzeichnung abgeschlossener Derivationen in $C[0,1]$. Wie sich zeigt, lassen sich diejenigen Derivationen, welche Erzeuger starkstetiger Halbgruppen sind, als $g\frac{\tilde{d}}{dp}$, $g \in C[0,1]$, schreiben, wobei $\frac{\tilde{d}}{dp}$ der Ableitungsoperator bezüglich einer geeigneten "Differenzierbarkeitsstruktur" auf $[0,1]$ ist.

Kapitel II ist der Charakterisierung der Generatoren von Verbandshalbgruppen, d.h. starkstetigen Halbgruppen von Verbandshomomorphismen, auf Banachverbänden gewidmet. Um dies erfolgreich durchführen zu können, wird zunächst

in §1 die Betragsabbildung komplexer Banachverbände $\Theta: x \longrightarrow |x|$ auführlich auf ihre Differenzierbarkeitseigenschaften hin untersucht. Danach ist Θ u.a. in Vektoren x, für die $|x|$ ein quasiinnerer Punkt ist, stets Gateauxdifferenzierbar (II.1.2). In den Paragraphen 2 - 4 wird die eigentliche "Charakterisierung" durchgeführt. So ist z.B. $A: \mathcal{D}(A) \longrightarrow E$ genau dann der Erzeuger einer Verbandshalbgruppe auf einem ordnungsvollständigen Banachverband E, wenn A lokal (d.h. $x \perp y,\ x \in \mathcal{D}(A) \Longrightarrow Ax \perp y$), $\mathcal{D}(A)$ ein Vektorunterverband und A eine starkstetige Halbgruppe erzeugt (siehe II.3.4 , II.3.7). Dieses Resultat stellt eine Verallgemeinerung eines entsprechenden Satzes für Banachverbände mit ordnungsstetiger Norm von R. Nagel und M. Wolff dar (vgl. II.2.4). In §4 schließlich werden die Erzeuger von Verbandshalbgruppen auf beliebigen Banachverbänden gekennzeichnet.

Im Mittelpunkt von Kapitel III stehen (beschränkte) Verbandsgruppen mit kompakter Resolvente. Ein Beispiel hierfür ist die von dem Rotationsfluß $\varphi: S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ (S^1 Einheitskreis) mit Periode φ (vgl. I.3.1) induzierte starkstetige Gruppe auf $C(S^1)$ und $L^p(S^1, \tilde{\mu}), 1 \leq p < \infty$ ($\tilde{\mu}$ Haarmaß). Es zeigt sich nun, daß es - bis auf Isomorphie - Verbandsgruppen mit kompakter Resolvente außer auf endlichdimensionalen Räumen nur auf Banach-

funktionenverbänden über endlich vielen Kopien von S^1 geben kann und die Gruppen selbst von Rotationsflüssen herkommen (III.1.1 , III.2.5).

Die vorliegende Arbeit enstand unter der Betreuung von Herrn Professor Dr. Rainer Nagel.

Ferner gilt mein aufrichtiger Dank unserer Tübinger Arbeitsgruppe und besonders Herrn Professor Dr. Manfred Wolff für viele Anregungen und das Interesse an den vorliegenden Untersuchungen.

Aprovecho la oportunidad para mostrar mi agradecimiento al Profesor Dr. Alberto Verjovsky, quien me introdujo a la belleza del pensamiento geométrico en las matemáticas.

§0 Präliminarien

Grundsätzlich orientiert sich die Terminologie an der Monographie "Banach Lattices and Positive Operators" von H. H. Schaefer [1974]. Besonders wichtige, abweichende oder dort nicht erfaßte Bezeichnungen bilden neben einigen Resultaten , die zum Verständnis der folgenden Kapitel notwendig sind, den Inhalt dieses Paragraphen.

1. Abbildungen: Die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen $f:N_1 \longrightarrow N_2$, $g:N_2 \longrightarrow N_3$ (N_1,N_2,N_3 Mengen) wird mit $g\circ f$, die Einschränkung von f auf eine Teilmenge $N_o \subset N_1$ mit $f|_{N_o}$ bezeichnet. χ_{N_o} sei das Symbol für die Indikatorfunktion von N_o, d.h.

$$\chi_{N_o} : N_1 \longrightarrow [0,1] \ , \ \chi_{N_o}(p) = \begin{cases} 1, \text{ falls } p \in N_o \\ 0, \text{ falls } p \notin N_o \end{cases} ,$$

Dabei steht **1** für χ_{N_1} , wenn der Definitionsbereich keiner Verwechslungsgefahr unterliegt.

2. Zahlen: Wie üblich werden die Zeichen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$ für die natürlichen, ganzen, rationalen, reellen, positiven reellen (einschließlich Null), komplexen Zahlen verwendet.

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $\overline{\alpha}$ die konjugiertkomplexe Zahl und

$\mathrm{Re}(\alpha)$ der Realteil von α.

3. Banachräume: Der Skalarkörper der betrachteten Banachräume kann i.a. sowohl $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C}$ sein. Immer dann, wenn eine Aussage eine Unterscheidung zwischen reellen und komplexen Banachräumen notwendig macht, wird dies explizit formuliert.

$\mathscr{L}_s(E,F)$ ist der Vektorraum $\mathscr{L}(E,F)$ aller stetigen linearen Operatoren von E nach F (E,F Banachräume), versehen mit der starken Operatortopologie. Dabei steht $\mathscr{L}_s(E)$ abkürzend für $\mathscr{L}_s(E,E)$. $T \in \mathscr{L}(E,F)$ wird Kontraktion genannt, wenn $\|Tx\| \leq \|x\|$ für alle $x \in E$ gilt.

Im übrigen verweise ich auf H. H. Schaefer [1966].

4. Banachverbände: Jeder komplexe Banachverband E geht durch Komplexifizierung aus einem reellen Banachverband $E_{\mathbb{R}}$ hervor. Ein Element $x \in E$ kann also auf genau eine Weise in $x = x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in E_{\mathbb{R}}$ zerlegt werden. Jedem $x \in E$ ist demnach ein wohlbestimmter "konjugierter" Vektor $x^* := x_1 - ix_2$ zugeordnet.

Anstelle von $\inf\{y,z\}$ bzw. $\sup\{y,z\}$ $(y,z \in E_{\mathbb{R}})$ wird $y \wedge z$ bzw. $y \vee z$ geschrieben, und schließlich bezeichnet $x^{\perp\perp}$ das von $x \in E$ erzeugte Band.

Ein positiver Operator $T \in \mathscr{L}(E)$ ist eine Abbildung, welche die positiven Elemente von E in sich abbildet. $T \in \mathscr{L}(E)$ heißt Verbandshomomorphismus, wenn $T|x| = |Tx|$ für

alle $x \in E$ gilt und Verbandsisomorphismus, wenn T außerdem noch invertierbar ist.

5. Spezielle Räume: K sei durchweg ein kompakter topologischer Raum. Die komplexwertigen (bzw. reellwertigen) stetigen Funktionen $C_{\mathbb{C}}(K)$ (bzw. $C_{\mathbb{R}}(K)$) auf K bilden einen komplexen (reellen) Banachraum, wenn man sie mit der Supremumsnorm $\|x\| := \sup|x(p)|$ versieht. Dieser Banachraum läßt sich sowohl als kommutative C^*-Algebra mit Eins 1 (bei punktweiser Multiplikation und Involution) als auch als Banachverband mit Ordnungseins (bei punktweiser Ordnung und Betragsbildung) betrachten. Von beiden "Strukturen" wird im folgenden Gebrauch gemacht. Die Bezeichnung C(K) anstelle von $C_{\mathbb{C}}(K)$ und $C_{\mathbb{R}}(K)$ verwende ich, wenn für die Aussage eine Unterscheidung nicht notwendig ist.

Die in der Arbeit vorkommenden Begriffe und Ergebnisse aus der Theorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten finden sich in den meisten diesbezüglichen Büchern. Mir dienten als Vorlage Y. Matsushima [1972] und M. Hirsch [1976].

Für eine C^∞-Mannigfaltigkeit (mit Rand) Y bezeichne $C^r(Y)$ die r-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Fast immer (die einzige Ausnahme bildet I.2.6) wird Y eine offene Teilmenge eines Intervalles $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ bil-

den, versehen mit einem aus einer einzigen injektiven, stetigen Abbildung $\psi: Y \longrightarrow \mathbb{R}$ bestehenden Atlas $\{\psi\}$. $x \in C[\alpha,\beta] \cap C^1(Y)$ soll dann $x \in C[\alpha,\beta]$ und $x|_Y \in C^1(Y)$ bedeuten.

Die Bezeichnungen $L^p(X,\mu)$ werden im üblichen Sinne verwendet (vgl. z.B. Dunford - Schwarz [1967]).

6. Starkstetige Halbgruppen: Eine ausführliche Darstellung der Theorie starkstetiger Halbgruppen auf Banachräumen beinhalten die Lecture notes von A. Pazy [1974] und das nun schon "klassische" Buch von E. Hille-R. S. Phillips [1965]. Die sich anschließende kurze Zusammenfassung einiger Tatsachen möge dem Leser zur Orientierung oder als Erinnerung dienen.

Eine starkstetige Halbgruppe (bzw. starkstetige Gruppe) ist eine über $\mathbb{R}_+$ (bzw. $\mathbb{R}$) parametrisierte Menge $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ (bzw. $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$) stetiger Operatoren $T(t) \in \mathcal{L}(E)$ auf einem Banachraum E mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Abbildung $t \longmapsto T(t)$ von $\mathbb{R}_+$ (bzw. $\mathbb{R}$) nach $\mathcal{L}_s(E)$ ist stetig.
2. $T(o) = id$.
3. $T(s+t) = T(s)T(t)$ für alle $s,t \in \mathbb{R}_+$ (bzw. $s,t \in \mathbb{R}$).

Das Wachstum solcher Halbgruppen läßt sich nach oben ab-

schätzen; es gibt nämlich geeignete Konstanten $\omega, M \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ erfüllen.

Die Menge aller $x \in E$, für die $Ax := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (T(t)x - x)$ existiert, bildet einen Unterraum $\mathcal{D}(A)$ von E und die Abbildung $A: \mathcal{D}(A) \longrightarrow E$, $x \longmapsto Ax$, wird Erzeuger von $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ genannt. Wenn $\lambda - A := \lambda id - A$ invertierbar ist, bezeichne $R(\lambda)$ die Inverse.

Theorem (Hille - Yosida) : Ein linearer Operator $A: \mathcal{D}(A) \longrightarrow E$ ist genau dann Erzeuger einer starkstetigen (C_o-)Halbgruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, die $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ erfüllt, wenn

(i) A abgeschlossen und $\mathcal{D}(A)$ dicht ist.

(ii) $R(\lambda)$ in jedem $\lambda \in (\omega, \infty)$ existiert und für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (\omega, \infty)$ gilt $\|R(\lambda)^n\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n}$.

Beweis: Siehe A. Pazy [1974] , I.5.3.

Für $\lambda \in (\omega, \infty)$ läßt sich die Resolvente $R(\lambda)$ schreiben als $R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$ für alle $x \in E$, wobei das Integral als uneigentliches Riemannintegral zu verstehen ist.

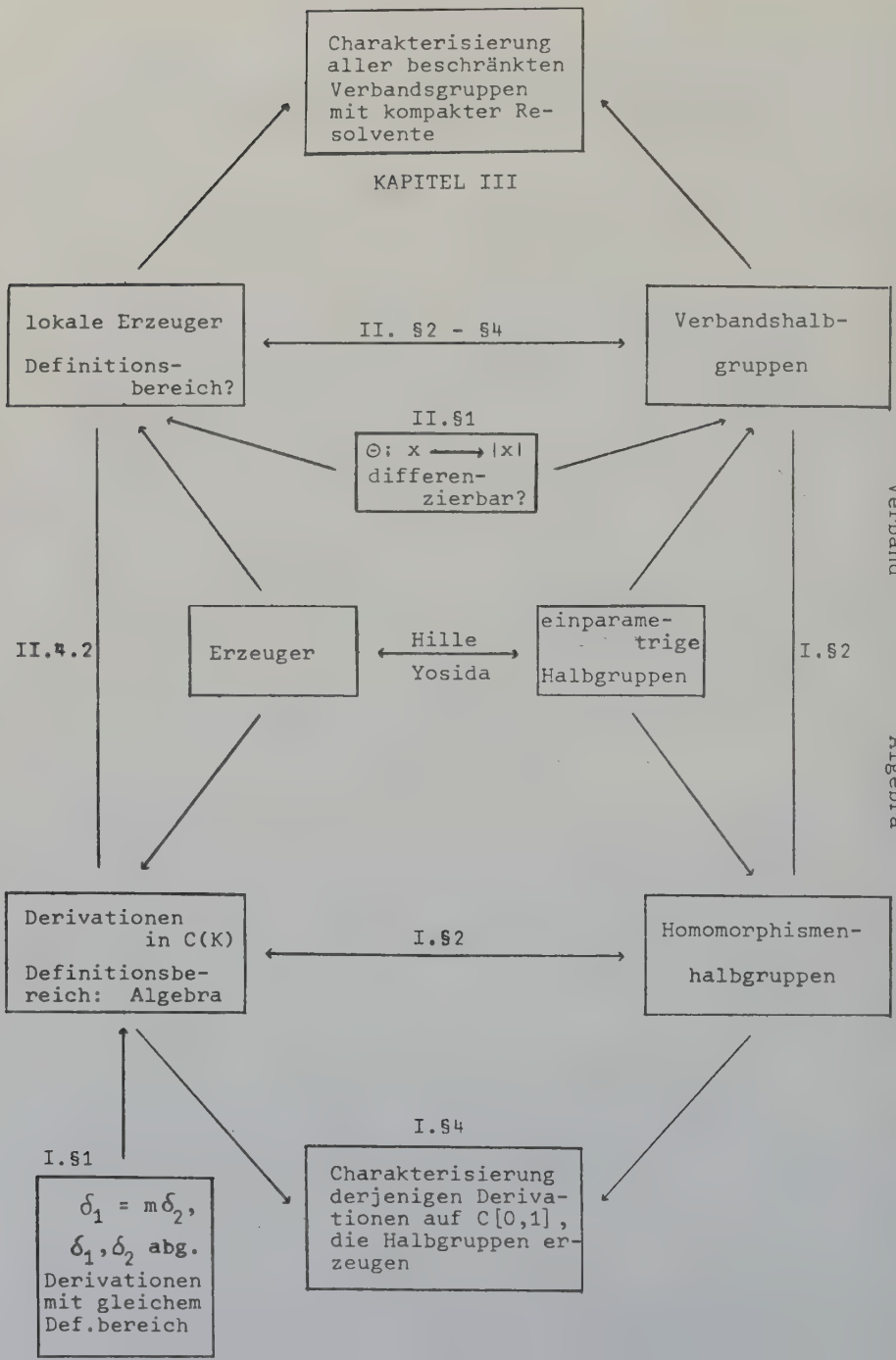
7. Isomorphie: Die Begriffe isomorph (abgekürzt $\simeq$) und Isomorphie werden stets im Sinne von "alle gerade betrachteten Strukturen erhaltend" verwendet.

8. Numerierung: Die folgenden Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

I.2.3 ≙ Kapitel I, §2, Aussage 3.

1.3 ≙ §1, Aussage 3 in dem gerade vorliegenden Kapitel.

Mit (1.2.3) auf der linken Seite wird die dritte Formel nach Satz 1.2 benannt, auf welche später Bezug genommen wird. Steht (1.2.3) auf der rechten Seite einer Rechnung, so wird zu dem gerade ausgeführten Schritt die Formel (1.2.3) benötigt.


Charakterisierung aller beschränkten Verbandsgruppen mit kompakter Resolvente
KAPITEL III
lokale Erzeuger
Definitionsbereich?
II. §2 - §4
Verbandshalbgruppen
II.§1
Θ; x ⟶ |x|
differenzierbar?
Verband
II.4.2
Erzeuger
Hille
Yosida
einparametrige Halbgruppen
I.§2
Algebra
Derivationen in C(K)
Definitionsbereich: Algebra
I.§2
Homomorphismenhalbgruppen
I.§4
I.§1
$\delta_1 = m\delta_2$,
δ_1, δ_2 abg.
Derivationen mit gleichem Def.bereich
Charakterisierung derjenigen Derivationen auf C[0,1], die Halbgruppen erzeugen

K A P I T E L I

Zwei Probleme von S. Sakai

"It is an important and challenging problem to study unbounded derivations in C^*-algebras" (S. Sakai [1977a], Seite 86).

Anscheinend haben viele Mathematiker diese "Herausforderung" angenommen, denn in den letzten Jahren entwikkelte sich die Theorie unbeschränkter Derivationen auf C^*-Algebren zu einem schnell wachsenden Gebiet von zunehmender Bedeutung. Anders als bei Fragestellungen, die die Struktur von C^*-Algebren betreffen, gibt es für Derivationen noch viele oft überraschend einfach formulierbare Probleme auf C(K)-Räumen, die auf Beantwortung warten (siehe S. Sakai [1977a,b]). Zwei davon bilden den Mittelpunkt dieses Kapitels:

(I) Let δ_0 be a closed $*$-derivation in a commutative C^*-algebra $\mathcal{A}$ und let δ be a derivation defined on $\mathcal{D}(\delta_0)$. Then can we conclude that δ is closable (siehe Sakai [1977b], Problem 1.3)?

(II) Let $C[0,1]$ and let δ be a closed derivation in $C[0,1]$. Can we characterize δ ? (For example, $\delta = f\frac{d}{dx}$, where f is some function on $[0,1]$). (siehe S. Sakai [1977a] , Problem 4. (Herman-Powers)).

Das erste Problem wird in §1 behandelt und in 1.6 positiv beantwortet. Die zweite Frage läßt sich nicht so eindeutig klären. Sie wird in §4 für Derivationen, die Erzeuger starkstetiger Halbgruppen sind, analysiert, und ich hoffe, die Antwort "ja und nein" dort verständlich machen zu können. "Hoffe" deshalb, weil die Formalisierung eigentlich einfacher geometrischer Überlegungen "unsympathische" Bezeichnungen notwendig machte.

§2 beinhaltet eine Einführung in die Zusammenhänge zwischen starkstetigen *-Automorphismenhalbgruppen, ihren Erzeugern (Derivationen) und deren Definitionsbereichen. Die Beispiele in §3 erläutern einige der auftretenden Phänomene und es wird sich in §4 herausstellen, daß 3.10 "bis auf Isomorphie" alle starkstetigen *-Automorphismenhalbgruppen auf $C[0,1]$ beschreibt.

§1 Problem (I)

K sei ein kompakter Raum. Ein Paar $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$, bestehend aus einer in C(K) dichten *-Unteralgebra $\mathcal{D}(\delta)$ mit $\mathbf{1} \in \mathcal{D}(\delta)$ und einem linearen Operator $\delta : \mathcal{D}(\delta) \longrightarrow C(K)$, heiße Derivation[1] (mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(\delta)$), wenn δ die Produktregel erfüllt und mit der Involution kommutiert, d.h. wenn für alle $x,y \in \mathcal{D}(\delta)$

$$\delta(xy) = (\delta x)y + x\delta y \quad \text{und} \quad \delta x^* = (\delta x)^*$$

gilt.

---

[1] oft auch *-Derivation

Ist K= [0,1] und $\frac{d}{dp}: C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ der Ableitungsoperator, so ist $(\frac{d}{dp}, C^1[0,1])$ eine abgeschlossene Derivation. S.Sakai wies in [1977b] 1.12, 1.13 nach, daß jede Derivation $(\delta, \mathscr{D}(\delta))$ mit $\mathscr{D}(\delta) = C^1[0,1]$ abschließbar ist und sich in der Form $(m\frac{d}{dp}, C^1[0,1])$ mit $m \in C[0,1]$ schreiben läßt.

Ist K nun ein beliebiger kompakter Raum, sind $(\delta, \mathscr{D}(\delta))$, $(\delta_1, \mathscr{D}(\delta))$ Derivationen mit demselben Definitionsbereich $\mathscr{D}(\delta)$ und ist δ abgeschlossen, so wird 1.6 zeigen, daß analog zu dem eben erwähnten Resultat δ_1 abschließbar ist und $\delta_1 = m\delta$ gilt. Im Unterschied zu vorher ist m i.a. aber nur noch auf einer dichten Menge stetig (siehe 1.7). Die Ursache hierfür sind die "singulären Punkte".

1.1 Definition: Sei $(\delta, \mathscr{D}(\delta))$ eine Derivation

(i) Unter einem singulären Punkt versteht man ein $p \in K$, in dem δx für alle $x \in \mathscr{D}(\delta)$ verschwindet. Die Menge aller singulären Punkte wird stets mit $\gamma(\delta)$ bezeichnet. Ist $p \in \gamma(\delta)^c$, so heiße p regulär.

(ii) Ein derivatives Funktional im Punkte $p \in K$ ist eine Linearform $\partial_p: \mathscr{D}(\delta) \longrightarrow \mathbb{C}$, für die

$$\partial_p(xy) = (\partial_p(x))y(p) + x(p)\partial_p(y),$$

$$\partial_p(x^*) = \overline{\partial_p(x)}$$

für alle $x,y \in \mathscr{D}(\delta)$ gilt.

Einfache Beispiele für Derivationen mit singulären Punkten finden sich in §3.

1.2 Lemma: $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$ sei eine abgeschlossene Derivation in $C(K)$ und $\partial_p : \mathcal{D}(\delta) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein derivatives Funktional in $p \in K$.

(i) $\mathcal{D}(\delta)$ ist mit der Graphennorm $\|x\|_\delta := \|x\| + \|\delta x\|$ ein Banachraum (der im folgenden mit $(\mathcal{D}(\delta), \|\ \|_\delta)$ benannt wird) und $\delta \in \mathcal{L}((\mathcal{D}(\delta), \|\ \|_\delta), C(K))$.

(ii) Sei $x \in \mathcal{D}(\delta)$, $x(K) \subset \mathbb{R}$, und $g \in C^\infty([-\|x\|, \|x\|])$. Dann ist $g \circ x \in \mathcal{D}(\delta)$, und es gilt:

$$\partial_p(g \circ x) = g'(x(p))\partial_p(x) ,$$

$$\delta(g \circ x) = (g' \circ x)\delta x .$$

(iii) Für zwei abgeschlossene, disjunkte Mengen M_1, $M_2 \subset K$ gibt es ein $x \in \mathcal{D}(\delta)$ mit Werten in $[0,1]$, das auf M_1 konstant gleich Eins ist und auf M_2 verschwindet.

(iv) Sind $x, y \in \mathcal{D}(\delta)$ und ist $x(q) = y(q)$ für alle q aus einer offenen Umgebung U von p, dann ist

$$\partial_p(x) = \partial_p(y).$$

(v) Wenn $\partial_p \notin (\mathfrak{D}(\delta), \|\ \|_\delta)'$ ist, so existiert ein $y \in \mathfrak{D}(\delta)$ mit:

$$\partial_p(y) = 1 \qquad \text{und} \qquad \delta y(p) = 0 \ .$$

Beweis: (i) ist klar.

(ii) Sei $x \in \mathfrak{D}(\delta)$ mit Werten in $\mathbf{R}$ und $g \in C^\infty\left[-\|x\|, \|x\|\right]$. Dann gibt es eine Folge von Polynomen $g_n \in C^\infty\left[-\|x\|, \|x\|\right]$, für die

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} g_n' = g'$$

erfüllt ist.

Da $\mathfrak{D}(\delta)$ eine $*$-Unteralgebra ist, muß mit x auch $g_n \circ x \in \mathfrak{D}(\delta)$ für alle $n \in \mathbf{N}$ sein, und da δ eine Derivation ist, gilt $\delta(g_n \circ x) = (g_n' \circ x)\delta x$. Aus der Abgeschlossenheit von δ folgt $g \circ x \in \mathfrak{D}(\delta)$ und die zweite Gleichung.

Setze $\alpha := x(p)$. Es existiert ein $h \in C^\infty\left[-\|x\|, \|x\|\right]$ mit

$$g(s) = g(\alpha) + g'(\alpha)(s-\alpha) + h(s)(s-\alpha)^2$$

für alle $s \in \left[-\|x\|, \|x\|\right]$.

Die Funktion

$$z : q \longrightarrow g(x(q)) - g'(\alpha)(x(q)) - h(x(q))(x(q)-\alpha)^2$$

ist konstant auf K und wegen $\partial_p(1) = \partial_p(1^2) = 2\partial_p(1)$ muß

$\partial_p(z) = 0$ sein. Da $g \circ x \in \mathcal{D}(\delta)$ ist, ergibt sich die erste Gleichung der Behauptung aus:

$$\partial_p(g \circ x) = g'(\alpha)\partial_p(x) - \partial_p((h \circ x)(x - \alpha 1)^2)$$

$$= g'(x(p))\partial_p(x) - (\partial_p((h \circ x)(x - \alpha 1)))(x(p) - \alpha) - h(x(p))(x(p) - \alpha)\partial_p$$

$$= g'(x(p))\partial_p(x) \quad .$$

(iii) Nach dem Satz von Uryson existiert eine stetige Funktion $u: K \longrightarrow [0,1]$ mit $u(M_1) \subset \{1\}$ und $u(M_2) \subset \{0\}$. Da $\mathcal{D}(\delta)$ dicht in $C(K)$ ist, findet man ein $z \in \mathcal{D}(\delta)$ mit $\|z - u\| \leq 1/3$. Wählt man $g \in C^\infty[0,1]$ derart, daß

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } t \leq 1/3 \\ 1 & \text{,falls } t \geq 1/3 \end{cases}$$

ist, dann hat $x := g \circ u$ die gewünschten Eigenschaften, und nach (ii) ist $x \in \mathcal{D}(\delta)$.

(iv) Sei U offene Umgebung von p und sei $z := x - y$ auf U identisch Null. Nach (iii) gibt es ein $u \in \mathcal{D}(\delta)$ mit $u(U^c) \subset \{0\}$ und $u(p) = 1$. Da $uz = 0$ ist, gilt

$$0 = \partial_p(zu) = \partial_p(z)u(p) + z(p)\partial_p(u) = \partial_p(z) \quad .$$

(v) $\widetilde{\partial}_p : \mathcal{D}(\delta) \longrightarrow C(K)$, $x \longmapsto \delta x(p)$ definiert ein stetiges, lineares Funktional auf $(\mathcal{D}(\delta), \| \ \|_\delta)$. Ist ∂_p unstetig, so müssen $\widetilde{\partial}_p$ und ∂_p in dem Vektorraum aller Linearformen auf $\mathcal{D}(\delta)$ linear unabhängig sein. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Auf dem Weg zum Beweis von 1.6 erfolgt nun in 1.3 der wichtigste Schritt. Dieses scheinbar sehr technische Lemma versteht man besser, wenn man als $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$ das Paar $(\frac{d}{dp}, C^1[0,1])$ nimmt und sich alle vorkommenden Funktionen und Mengen aufzeichnet.

1.3 Lemma: $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$ sei eine abgeschlossene Derivation in $C(K)$. Ferner sei $y \in \mathcal{D}(\delta)$, $y(K) \subset \mathbb{R}$, $p \in K$ und W eine offene Umgebung von p. Falls $y(p) = 0$ ist, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$: Es gibt eine offene Umgebung $U \subset W$ von p und Funktionen $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}(\delta)$, die, wenn man $x := u(g \circ y)$ setzt, folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) $u(q) = 1$ für alle $q \in U$.

(ii) $u(q) = 0$ für alle $q \in W^c$.

(iii) $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$.

(iv) $x \in \mathcal{D}(\delta)$, $\|\delta x\| \leq |\delta y(p)| + \varepsilon$.

(v) $\delta x(p) = \delta y(p)$.

(vi) $\|x\| \leq \varepsilon$.

Beweis: Setze $\alpha := \delta y(p)$. Da δy stetig ist, gibt es eine offene Umgebung $V \subset W$ von p mit

$$\delta y(q) \in \left[\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right] \qquad \text{für alle } q \in V .$$

Ist $U \subset \overline{U} \subset V$ eine noch kleinere Umgebung von p, so existiert nach 1.2 (iii) ein $u \in \mathcal{D}(\delta)$ mit Werten in $[0,1]$, das auf U Eins ist und auf V^c verschwindet.

Setze $\beta := \frac{\varepsilon}{2\|u\|_\delta}$. Sei $g: \mathbb{R} \longrightarrow [-\beta,\beta]$ eine C^∞-Funktion, die auf $\{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus [-\beta,\beta])$ verschwindet und deren Ableitung $g'(0) = 1$ und $|g'(s)| \leq 1$ für alle $s \in \mathbb{R}$ erfüllt.

u und g haben die in (i)-(iii) aufgelisteten Eigenschaften.

Nach 1.2 (ii) ist $x := u(g \circ y) \in \mathcal{D}(\delta)$ und $\|x\| \leq \varepsilon$. Die Aussage (iv) läßt sich unter Benutzung von 1.2 (ii), (iv) wie folgt nachrechnen:

$$\begin{aligned} |\delta x(q)| &= |(\delta u)(q)(g \circ y)(q) + u(q)g'(y(q))(\delta y)(q)| \\ &\leq \left\{ \begin{array}{ll} \beta\|\delta u\| & \text{,falls } q \in V^c \\ \beta\|\delta u\| + |\delta y(q)| & \text{,falls } q \in V \end{array} \right\} \leq \varepsilon + |\alpha| . \end{aligned}$$

Wählt man in der vorangehenden Gleichung $p = q$, so folgt aus

$$\delta x(p) = u(p)g'(y(p))\delta y(p) = \delta y(p)$$

der letzte noch zu beweisende Teil (v) des Lemmas. □

1.4 Lemma: $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$ sei eine Derivation in $C(K)$ und $\partial_p \in (\mathcal{D}(\delta), \|\ \|_\delta)'$ ein derivatives stetiges Funktional in $p \in K$. Dann gibt es ein $m_p \in \mathbb{R}$ mit $\partial_p(x)(p) = m_p(\delta x(p))$ für alle $x \in \mathcal{D}(\delta)$.

Beweis:

Angenommen, es existiere kein solches m_p. Dann sind ∂_p und das derivative Funktional $\tilde{\partial}_p : x \longmapsto (\delta x)(p)$ linear unabhängig, sofern $\tilde{\partial}_p \neq 0$ ist. Gleichgültig, ob $\tilde{\partial}_p = 0$ oder $\tilde{\partial}_p \neq 0$ ist, findet man ein $y \in \mathcal{D}(\delta)$ mit $\delta y(p) = 0$ und $\partial_p(y) = 1$.

Sei $\varepsilon := \frac{1}{3\|\partial\|_\delta}$. Wählt man für dieses ε (und $W := K$) Funktionen $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in \mathcal{D}(\delta)$ mit den in 1.3 (i)-(vi) aufgelisteten Eigenschaften und setzt wie dort $x := u(g \circ y)$, dann ergibt sich aus

$$1 = \partial_p(x) \leq \|\partial_p\|_\delta \|x\|_\delta \leq \|\partial_p\|_\delta (\|x\| + \|\delta x\|) \leq \frac{2}{3}$$

ein Widerspruch. □

Der folgende Satz, der von S. Sakai aus einem allgemeineren Resultat von Johnson hergeleitet wird ([1977b], 1.1), läßt sich direkter unter Zuhilfenahme von 1.3 beweisen:

1.5 Satz: Seien $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$, $(\delta_1, \mathcal{D}(\delta))$ Derivationen mit dem gleichen Definitionsbereich $\mathcal{D}(\delta) \subset C(K)$ und sei δ abgeschlossen. Dann ist $\delta_1 \in \mathcal{L}((\mathcal{D}(\delta), \|\ \|_\delta), C(K))$.

Beweis: Für $p \in K$ sei $\partial_p : \mathcal{D}(\delta) \longrightarrow \mathbb{C}$ das derivative Funktional $x \longmapsto \delta_1 x(p)$.

Die Menge $M := \{p \in K \mid \partial_p \text{ ist unstetig}\}$ enthält keine isolierten Punkte von K, da es auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ keine nichttrivialen Derivationen gibt.

Lemma: $\mathring{M} = \phi$

Beweis: Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es eine Folge $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ offener, paarweise disjunkter, nichtleerer Mengen $W_n \subset \mathring{M}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $p_n \in W_n$ ein beliebiges Element. Nach 1.2 (v) lassen sich $y_n \in \mathcal{D}(\delta)$ mit

$$\partial_p(y_n) = n \quad \text{und} \quad \delta y_n(p_n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

finden. Diese y_n können aufgrund von Lemma 1.3 mit Hilfe von Funktionen u_n und g_n zu $x_n := u_n(g_n \circ y_n)$ so abgeändert werden, daß die Träger der x_n in den W_n liegen und ansonsten die dort angegebenen Eigenschaften für $\varepsilon := \frac{1}{2^n}$ erfüllt sind.

Definiert man nun $\overline{x} := \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, so ist nach 1.3 (iv), (vi) $\overline{x}$ ein wohldefiniertes Element von $(\mathcal{D}(\delta), \| \|_\delta)$. Da $\overline{x}$ mit x_n auf W_n übereinstimmt, ist nach 1.2 (iv):

$$\delta_1 \overline{x}(p_n) = \partial_{p_n}(\overline{x}) = \partial_{p_n}(x_n) = n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das ergibt einen Widerspruch, denn δ_1 sollte nach C(K) abbilden. Das Lemma ist somit bewiesen.

Da $(\mathfrak{D}(\delta), \|\ \|_\delta)$ ein Banachraum ist, genügt es nach dem Theorem vom abgeschlossenen Graphen zu zeigen, daß δ_1 abgeschlossen ist. Sei also $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_\delta = 0$ und sei $\lim_{n\to\infty} \delta_1 x_n = y$ in C(K). Ist $p \in M^c$, so ist ∂_p stetig und folglich

$$y(p) = \lim_{n\to\infty} \delta_1 x_n(p) = \lim_{n\to\infty} \partial_p(x_n) = 0 \ .$$

Da M^c dicht in K ist, muß demnach $y = 0$ sein. □

Wir kommen jetzt zur Beantwortung von Problem (I):

1.6 Theorem: Seien $(\delta, \mathfrak{D}(\delta))$, $(\delta_1, \mathfrak{D}(\delta))$ Derivationen mit dem gleichen Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\delta) \subset C(K)$. δ sei abgeschlossen und $Rd\gamma(\delta)$ sei der topologische Rand der Menge aller singulären Punkte $\gamma(\delta)$.

(i) Es existiert eine beschränkte Funktion $m: K \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Einschränkung auf $K \setminus Rd\gamma(\delta)$ stetig ist, und für die $\delta_1 = m\delta$, d.h.

$$\delta_1 x(p) = m(p)\delta x(p) \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{D}(\delta),\ p \in K$$

gilt.

(ii) δ_1 ist abschließbar.

Beweis: (i) Nach 1.5 ist für $p \in K$ das derivative Funktional $\partial_p : x \longmapsto \delta_1 x(p)$ stetig, und nach 1.4 gibt es ein $m_p \in \mathbb{R}$ mit $\partial_p(x) = m_p(\delta x(p))$ für alle $x \in \mathcal{D}(\delta)$. Da für $p \in \gamma(\delta)$ offenbar $m_p = 0$ gewählt werden kann, ist

$$m: K \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad m(p) := \begin{cases} m_p & , p \in (\gamma(\delta))^c \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} ,$$

eine Funktion, die $\delta_1 = m\delta$ erfüllt.

m ist in jedem regulären Punkt $p \in K$ stetig, denn ist $x \in \mathcal{D}(\delta)$ mit $\delta x(p) \neq 0$, so ist $m(q) = \frac{\delta_1 x(q)}{\delta x(q)}$ für alle q aus einer kleinen Umgebung von p.

Infolgedessen bleibt nur noch die Beschränktheit von m zu zeigen. Angenommen, dies wäre nicht der Fall und $m(p_n) > n$ für eine Folge $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von regulären Punkten. Mit Hilfe von 1.3 lassen sich $x_n \in \mathcal{D}(\delta)$, $n \in \mathbb{N}$, konstruieren, für die

$$\delta x_n(p_n) = 1 \quad \text{und} \quad \|x_n\|_\delta \leq 2$$

gilt. Daraus ergibt sich wegen

$$n < m(p_n)\delta x_n(p_n) = \delta_1 x_n(p_n) \leq \|\delta_1 x_n\| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ein Widerspruch, denn nach 1.5 ist $\sup_{\|x\|_\delta \leq 1} \|\delta_1 x\| < \infty$.

(ii) Sei x_n eine in C(K) gegen Null konvergente Folge von Elementen aus $\mathfrak{D}(\delta)$ und sei $\lim_{n\to\infty} \|\delta_1 x_n - y\| = 0$ für ein $y \in C[0,1]$.

Die Menge $\gamma_1 := \{ p \in K \mid m(p) = 0 \}$ ist abgeschlossen, und da y(q) Null sein muß für alle $q \in \gamma_1$, genügt es nachzuweisen, daß y in γ_1^c verschwindet.

Dazu sei o.B.d.A. $\gamma_1 \neq K$ und $p \notin \gamma_1$. Seien ferner U,V offene Umgebungen von p mit $U \subset \bar{U} \subset V \subset \bar{V} \subset \gamma_1^c$. Dann existiert ein $u \in \mathfrak{D}(\delta)$ mit Werten in $[0,1]$, und $u(\bar{U}) \subset \{1\}$, $u(V^c) \subset \{0\}$.

Nach Teil (i) ist $\delta_1 = m\delta$. Setzt man nun

$$\hat{m}: K \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \hat{m}(q) := \begin{cases} (m(q))^{-1} & , q \in \bar{V} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} ,$$

so ist $\hat{m}u \in C(K)$, denn m ist auf $\bar{V}$ verschieden von Null und $u(V^c) \subset \{0\}$. Nach Voraussetzung ist δ abgeschlossen, d.h. aus

$$\lim_{n\to\infty} ux_n = 0 \qquad \text{und}$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta(x_n u) = \lim_{n\to\infty} u\delta x_n = u\hat{m} \lim_{n\to\infty} \delta_1 x_n = u\hat{m}y$$

folgt $u\hat{m}y = 0$. Da ferner $p \notin \gamma_1$ war, muß $\hat{m}(p) \neq 0$ und somit y(p) = 0 sein.

□

Bemerkung: (i) Aus dem Beweis von 1.6 ergibt sich: $\gamma(\delta) \subset \gamma(\delta_1)$. Ist also δ_1 ebenfalls abgeschlossen, so ist $\gamma(\delta) = \gamma(\delta_1)$, und es existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$, die $c_1 \leq m(p) \leq c_2$ für alle $p \in \gamma(\delta)^c$ erfüllen.

Eine abgeschlossene Derivation wird also sehr weitgehend schon durch ihren Definitionsbereich festgelegt (Vgl. 2.7).

(ii) Das zu Beginn dieses Paragraphen erwähnte Resultat von S. Sakai für $(\frac{d}{dp}, C^1[0,1])$ ist ein Spezialfall von 1.6, denn $\gamma(\frac{d}{dp}) = \phi$.

Im Beweis von 1.6 war $m(q) := 0$ für alle $q \in \gamma(\delta)$ gesetzt worden. Diese Definition war (wegen $\gamma(\delta_1) \subset \gamma(\delta)$) willkürlich gewesen. Man fragt sich nun natürlich, ob es nicht möglich wäre, $m: \gamma(\delta)^c \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf K fortzusetzen.

Das folgende Beispiel zeigt, daß dies i.a. nicht geht (auch dann nicht, wenn $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$, $(\delta_1, \mathcal{D}(\delta))$ Erzeuger von starkstetigen Gruppen sind (vgl. §2)).

1.7 Beispiel: Sei $[-\infty,\infty]$ die Zweipunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$ und sei $\mathcal{D}(\delta) := \left\{ x \in C^1[-\infty,\infty] \,\middle|\, \lim_{|p| \to \infty} x'(p) = 0 \right\}$. Setzt man

$$\delta: \mathcal{D}(\delta) \longrightarrow C[-\infty,\infty], \quad \delta x := x'$$

$$\delta_1: \mathcal{D}(\delta) \longrightarrow C[-\infty,\infty], \quad \delta_1 x(p) := \begin{cases} (2+\cos p)x'(p), & p \in (-\infty,\infty) \\ 0, & p \in \{-\infty,\infty\} \end{cases}$$

so definieren $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$, $(\delta_1, \mathcal{D}(\delta))$ abgeschlossene Derivationen. Die Abbildung $m: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \longmapsto 2+\cos(p)$ kann aber auf $[-\infty, \infty]$ nicht stetig fortgesetzt werden.

§2 Homomorphismen und Derivationen

In diesem Paragraphen habe ich einige, im Wesentlichen bekannte Sätze und Definitionen über starkstetige Halbgruppen von Algebra- bzw. Verbandshomomorphismen und ihre Erzeuger (Derivationen) zusammengestellt. Mit Ausnahme von II.1 bauen alle folgenden Abschnitte in irgendeiner Weise darauf auf, in beweistechnischer, methodischer, "zumindest" aber in intuitiver Hinsicht.

Erwähnt sei auch die Arbeit von R. Derndinger - R. Nagel [1979], in der neben ähnlichen wie den hier durchgeführten Überlegungen das Spektrum von Derivationen auf C(K) untersucht wird.

Einen Beweis des folgenden Satzes und Hinweise auf weitere Äquivalenzen findet man bei H. H. Schaefer [1974], III. 9. 1.

2.1 Satz: Sei $T \in \mathcal{L}(C(K))$. Dann sind äquivalent:

(i) T ist ein Verbandshomomorphismus und $T\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

(ii) T ist ein $*$-Algebrahomomorphismus und $T\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

(iii) Es existiert eine stetige Abbildung $l: K \longrightarrow K$ derart, daß $Tx = x \circ l$ für alle $x \in C(K)$ gilt.

Der eben bewiesene Satz hat ein "kontinuierliches" Analogon. Bei dessen Formulierung und in den nächsten beiden Paragraphen werden einige Begriffe aus der topologischen Dynamik benötigt, die zunächst bereitgestellt werden müssen.

2.2 Definition: Eine stetige Abbildung $\varphi: K \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow K$ ($\varphi: K \times \mathbb{R} \longrightarrow K$) heißt Halbfluß (Fluß), wenn

(i) $\varphi(p,0) = p$ für alle $p \in K$ und

(ii) $\varphi(p,s+t) = \varphi(\varphi(s,p),t)$ für alle $p \in K$ und für alle $s,t \in \mathbb{R}_+$ (bzw. $s,t \in \mathbb{R}$) gilt.

Unter einer Trajektorie oder auch Flußlinie von φ durch den Punkt p versteht man die Menge $\{\varphi(p,t) \mid t \in \mathbb{R}_+ \ (t \in \mathbb{R})\}$. Eine Teilmenge M von K heißt invariant, wenn $\varphi(p,t) \in M$ für alle $p \in M$ und $t \in \mathbb{R}_+$ ($t \in \mathbb{R}$) gilt.

Ist $p \in K$ und $\{p\}$ invariant, so nennt man p halbstationär. Ein halbstationärer Punkt p wird zu einem stationären Punkt, wenn zusätzlich noch $\varphi(q,t) \neq p$ für alle $p \neq q$ und $t \in \mathbb{R}_+$ gilt. Die Menge der halbstationären Punkte werde mit $\gamma_h(\varphi)$ und die der stationären mit $\gamma(\varphi)$ bezeichnet.

Die Definitionen erläuternde Beispiele findet man in §3. Verwiesen sei schon jetzt auf die sich aus dem nächsten Satz ergebenen Zusammenhänge zwischen den (halb)stationären Punkten eines Halbflusses und den singulären Punkten einer Derivation (vgl. 4.1).

2.3 Satz: Es sei $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine Menge stetiger Operatoren auf C(K). Äquivalent sind:

(i) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ist eine starkstetige Halbgruppe von Verbandshomomorphismen und $T(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ für alle $t\in\mathbb{R}_+$.

(ii) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ist eine starkstetige Halbgruppe von $*$-Algebrahomomorphismen und $T(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ für alle $t\in\mathbb{R}_+$.

(iii) Es gibt einen Halbfluß $\varphi: K\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow K$, für den $T(t)x(p) = x(\varphi(p,t))$ für alle $x\in C(K)$, $p\in K$, $t\in\mathbb{R}_+$ gilt.

(iv) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ist eine starkstetige Halbgruppe, deren Erzeuger $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$ eine Derivation ist.

Beweis: Siehe R. Derndinger - R. Nagel [1979]. Den Beweis der Äquivalenz von (ii) und (iv) möchte ich hier in leicht modifizierter Form vorführen. Im II.Kapitel (§2-§4) wird nämlich die gleiche "Methode" verwendet, um den Zusammenhang zwischen Verbandshalbgruppen auf beliebigen Banachverbänden und ihren Erzeugern herzustellen (siehe Einleitung zu II.2).

Die Multiplikation $\Phi: C(K)\times C(K) \longrightarrow C(K)$, $(x,y) \longmapsto xy$ ist eine stetige bilineare Abbildung (und deshalb stetig differenzierbar). Ist $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine starkstetige Halbgruppe, so ist $\eta_x: \mathbb{R}_+ \longrightarrow C(K)$, $t \longmapsto T(t)x$ für $x\in\mathcal{D}(\delta)$ ebenfalls stetig differen-

zierbar, und der nun folgende eigentliche Beweis der Äquivalenzen besteht fast ausschließlich aus der Anwendung der "Kettenregel".

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) Seien $x,y \in \mathfrak{D}(\delta)$. Dann ist

$$\delta(xy) = \delta(\Phi(x,y)) = (\Phi\circ(\eta_x,\eta_y))'(0)$$

$$= \Phi(\eta_x'(0),\eta_y(0)) + \Phi(\eta_x(0),\eta_y'(0))$$

$$= (\delta x)y + x(\delta y) .$$

Klar ist außerdem, daß $\mathbb{1} \in \mathfrak{D}(\delta)$ ist.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii) Da $\delta\mathbb{1} = 0$ und demnach $\eta_{\mathbb{1}}' \equiv 0$ ist, gilt zunächst einmal $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Für $x,y \in \mathfrak{D}(\delta)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, ist die Abbildung $\varphi:\mathbb{R}_+ \longrightarrow E$

$$\varphi(t) := T(\tau-t)(T(t)xT(t)y) = T(\tau-t)\Phi(\eta_x(t),\eta_y(t))$$

stetig differenzierbar. Da $\varphi(\tau) = (T(\tau)xT(\tau)y)$ und $\varphi(0) = T(\tau)(xy)$ gilt, genügt es aufgrund des Mittelwertsatzes zu zeigen, daß $\varphi' \equiv 0$ ist:

$$\varphi'(t) = -\delta T(\tau-t)\Phi(\eta_x(t),\eta_y(t))$$
$$+ T(\tau-t)\left[\Phi(\eta_x'(t),\eta_y(t)) + \Phi(\eta_x(t),\eta_y'(t))\right]$$

$$= -\delta T(\tau-t)(T(t)xT(t)y)$$
$$+ T(\tau-t)\left[(\delta T(t)x)(T(t)y) + (T(t)x)\delta T(t)y\right]$$

$$= 0 .$$

□

Bemerkung: Der eben vorgeführte Beweis von (ii)⇔(iv) läßt sich wortwörtlich auf das entsprechende Problem in nichtkommutativen C^*-Algebra übertragen.

Der Beweis des folgenden Korollars ist leicht zu führen und sei dem Leser überlassen.

2.4 Korollar: Es sei $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine Menge stetiger Operatoren auf C(K). Äquivalent sind:

(i) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine starkstetige Gruppe von Verbandsisomorphismen und $T(t)\mathbf{1}=\mathbf{1}$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

(ii) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine starkstetige Gruppe von *-Algebraisomorphismen und $T(t)\mathbf{1}=\mathbf{1}$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

(iii) Es gibt einen Fluß $\varphi: K\times\mathbb{R}\longrightarrow K$ für den $T(t)x(p)=x(\varphi(p,t))$ für alle $x\in C(K)$, $p\in K$, $t\in\mathbb{R}$ gilt.

(iv) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine starkstetige Gruppe, deren Erzeuger $(\delta,\mathfrak{D}(\delta))$ eine Derivation ist.

2.5 Definition: Eine starkstetige Halbgruppe (Gruppe) auf C(K) heiße Morphismenhalbgruppe (Morphismengruppe), wenn eine der äquivalenten Bedingungen in 2.3 (bzw. 2.4) erfüllt ist.

Wir haben gesehen, daß den Morphismengruppen auf C(K)

Flüsse in K entsprechen. Man könnte sich fragen, ob es auf K nicht etwas dem Erzeuger der Morphismengruppe Entsprechendes gibt. Dies ist der Fall, wenn K eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, wie das nächste Korollar zeigen wird. Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit 2.6 keine Rolle mehr spielen wird (und mehr zur Erläuterung dienen soll), habe ich mich bei der Formulierung und beim Beweis auf das Notwendigste beschränkt. Bezüglich aller auftretenden Bezeichnungen und Begriffe sei deshalb auf eines der Bücher über differenzierbare Mannigfaltigkeiten verwiesen (z.B. Y.Matsushima [1972]).

2.6 Korollar: Es sei K eine (reelle) kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit mit Tangentenraum TK. Für eine Menge $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(C(K))$ sind äquivalent:

(i) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine Morphismengruppe, und für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt $T(t)C^\infty(K) \subset C^\infty(K)$

(ii) Es gibt einen C^∞-Fluß, der $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ induziert.

(iii) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine starkstetige Gruppe. Der Erzeuger $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$ ist eine Derivation, $C^\infty(K)$ ist enthalten in $\mathcal{D}(\delta)$ und $\delta(C^\infty(K)) \subset C^\infty(K)$.

(iv) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine starkstetige Gruppe, und es existiert ein C^∞-Vektorfeld $D:K \longrightarrow TK$ mit

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)x(p) - x(p)) = D(p)x \qquad (x\in C^\infty(K), p\in K)$$

(Dabei ist D(p)x die Ableitung von x in "Richtung" D(p)).

Beweis: (i)$\Longleftrightarrow$(ii) und (ii)$\Longrightarrow$(iii) sind "fast" klar und seien dem Leser überlassen. (ii)$\Longleftrightarrow$(iv) findet sich bei Y. Matsushima [1972] in II.12, wenn man bei (iv)$\Longrightarrow$(ii) noch das Folgende berücksichtigt: Ist φ der Fluß von D und ist für $x \in C^\infty(K)$, $p \in K$:

$$\varphi_{x,p}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \; t \longmapsto T(t)x(p) - x(\varphi(p,t)),$$

dann gilt $\varphi'_{x,p} \equiv 0$ und $\varphi(0)=0$, d.h. $T(t)x(p)=x(\varphi(p,t))$ (Mittelwertsatz). Da $C^\infty(K) \subset C(K)$ dicht ist, folgt (ii).

(iii)$\Longrightarrow$(iv) Ist D(p) derjenige Tangentenvektor in p, der $x \longmapsto \delta x(p)$, $x \in C^\infty(K)$, abbildet, so definiert $D: K \longrightarrow TK$, $p \longmapsto D(p)$ ein Vektorfeld. Es ist nicht allzu schwer einzusehen, daß D sogar ein C^∞-Vektorfeld ist, da $\delta(C^\infty(K)) \subset C^\infty(K)$ gilt. □

Das letzte Korollar dieses Paragraphen zeigt, daß der Definitionsbereich des Erzeugers einer Morphismenhalbgruppe gerade aus denjenigen Elementen in C(K) besteht, die "entlang der Trajektorien" stetig differenzierbar sind und deren so gebildete Ableitungen stetige Funktionen werden.

2.7 Korollar: $\varphi: K \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow K$ sei ein Halbfluß und $(\delta, \mathfrak{D}(\delta))$ sei der Erzeuger der von φ induzierten Morphismenhalbgruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Dann ist:

$\mathfrak{D}(\delta) = \{ x \in C(K) \mid$ für $p \in K$ ist $x_p: t \longmapsto x(\varphi(p,t))$ differenzierbar in 0 und $p \longmapsto x_p'(0)$ stetig $\}$

Beweis: Sei $x \in C(K)$, sei x_p in Null differenzierbar für alle $p \in K$ und sei $y: p \longmapsto x_p'(0)$ stetig.

Dann ist für jede gegen Null konvergente Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen y punktweiser Limes der Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n := \frac{1}{t_n}(T(t_n)x - x)$.

Die Folge der y_n ist beschränkt, denn es gilt:

$$|y_n(p)| = t_n^{-1} \left| \int_0^{t_n} x' \varphi_{(p,s)}(0)\, ds \right| \leq \|y\| .$$

Ist nun $0 \leq x' \in C(K)'$, so entspricht x' nach dem Riesz'schen Darstellungssatz einem Radonmaß μ. Aus dem Lemma von Lebesque folgt $\lim_{n \to \infty} \int |y - y_n| \, d\mu = 0$ und damit

$$\langle y, x' \rangle = \lim_{t \to 0} \left\langle \frac{1}{t}(T(t)y - y), x' \right\rangle \quad \text{für alle } x' \in C(K)' .$$

Es ist aber wohlbekannt (vgl. A. Pazy, II.1.1), daß dann $y \in \mathcal{D}(\delta)$ ist.

Die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich. □

§3 Zehn Beispiele

Die Beispiele haben zwei Aufgaben. Die eine ist die Beschreibung von einigen Phänomenen, die bei Derivationen, ihren Definitionsbereichen und den zugehörigen Mor-

phismenhalbgruppen auftreten können. Sätze und Definitionen der vorangehenden Paragraphen werden auf diese Weise erläutert.Die andere Aufgabe ist die Vorbereitung von §4. Durch "Aneinanderkleben" von ("gestauchten") Beispielen vom Typ 3.4-3.7 werden in 3.10 Halbflüsse konstruiert, auf die dann alle anderen Halbflüsse auf $[0,1]$ in §4 zurückgeführt werden.

3.1 Beispiel: Sei $S^1 := \{e^{2\pi ip} \mid p \in [0,1]\}$ der Einheitskreis und sei $\varrho > 0$. Die Abbildung

$$\varphi_\varrho : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad (e^{2\pi ip}, t) \longmapsto e^{2\pi i(p+\frac{t}{\varrho})},$$

heißt Rotationsfluß mit Periode ϱ. Ist $(\delta_\varrho, \mathcal{D}(\delta_\varrho))$ der Erzeuger der von φ_ϱ induzierten Morphismengruppe $\{R_\varrho(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ (siehe 2.4), so ist $\mathcal{D}(\delta_\varrho)$ die Menge aller derjenigen Funktionen $x \in C(S^1)$, für die $\tilde{x} \in C^1[0,1]$ und $\tilde{x}'(0) = \tilde{x}'(1)$ gilt, wobei $\tilde{x}$ die Abbildung $p \longmapsto x(e^{2\pi ip})$ sei.

Eine Eigenschaft, die $\{R_\varrho(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ sogar unter allen anderen Morphismengruppen auszeichnet (III. Kapitel), ist die Kompaktheit der Resolvente $R(\lambda) := (\lambda - \delta_\varrho)^{-1}$ für alle $\lambda > 0$. Dies läßt sich folgendermaßen einsehen:

Sei $x \in C(S^1)$, $p \in [0,1]$ und $\lambda > 0$:

$$R(\lambda)x(e^{2\pi ip}) = \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} R_\varrho(t)x \, dt\right)(e^{2\pi ip})$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} x(e^{2\pi i(p+\frac{t}{\varrho})})\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\varrho}^{(k+1)\varrho} e^{-\lambda t} x(e^{2\pi i(p+\frac{t}{\varrho})})\, dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\lambda\varrho}} \int_0^{1} e^{-\lambda t} x(e^{2\pi i(p+\frac{t}{\varrho})})\, dt \ .$$

Das Bild der Einheitskugel von $C(K)$ unter $R(\lambda)$ besteht also aus gleichmäßig gleichgradig stetigen Funktionen. Aus dem Satz von Arzelá- Ascoli ergibt sich die Kompaktheit von $R(\lambda)$.

Damit eine Derivation δ Erzeuger einer starkstetigen Halbgruppe ist, muß $\lambda - \delta$ nach dem Satz von Hille-Yosida für $\lambda > 0$ injektiv und surjektiv sein. 3.2, 3.3 liefern Beispiele, in denen jeweils das eine erfüllt und das andere verletzt ist. In beiden Fällen sind die Derivationen demnach keine Erzeuger von Halbgruppen.

3.2 Beispiel: Es sei $\mathfrak{D}(\delta) := C^1[0,1]$, und es sei

$$\delta : C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1] \quad , \quad x \longmapsto x' \ .$$

Dann ist $\lambda - \delta$ surjektiv für alle $\lambda \geq 0$ (vgl.3.7). Bezeichnet man aber mit $y_\lambda \in C^1[0,1]$ die Funktion $p \longmapsto e^{\lambda p}$, so gilt $(\lambda - \delta) y_\lambda = 0$, also Kern $(\lambda - \delta) \neq \{0\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.3 Beispiel: Es sei

$$\mathcal{D}(\delta) := \{ x \in C[-1,1] \mid x \in C^1([-1,0)\cup(0,1]),\ \lim_{\rho \to \delta} \sqrt{|\rho|}\, x'(\rho) \text{ existiert und } x'(1) = x'(-1) = 0 \}$$

und sei $\delta: \mathcal{D}(\delta) \longrightarrow C[-1,1]$, $\delta x(\rho) = \sqrt{|\rho|}\, x'(\rho)$. Eine kleine Rechnung (oder auch einfach die Tatsache, daß δ dissipativ ist) zeigt die Injektivität von $\lambda - \delta$ für alle $\lambda > 0$. Um einzusehen, daß z.B. id-δ nicht surjektiv ist, betrachte man das folgendermaßen definierte Funktional $\nu \in (C[-1,1])'$:

$$\nu(x) := \int_{-1}^{0} x(\rho) \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} e^{2\sqrt{|\rho|}} d\lambda(\rho) + \int_{0}^{1} x(\rho) \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} e^{-2\sqrt{|\rho|}} d\lambda - e^2 x(-1) + e^{-2} x(1)$$

($x \in C[-1,1]$, λ Lebesgue-Maß). Mittels partieller Integration rechnet man nach, daß $\nu(\delta x - x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(\delta)$ gilt. Also ist $\overline{(\mathrm{id}-\delta)\,\mathcal{D}(\delta)}$ nicht ganz $C[-1,1]$.

Weitere "Pathologien" von Derivationen, die keine starkstetigen Halbgruppen erzeugen, finden sich u.a. bei C.J.K. Batty [1979], F. Goodman [1979], R.H. Herman - O. Takenouchi [1979] und S. Sakai [1977a,b].

Die nun folgenden vier Beispiele "ähneln" sich zwar sehr, sind aber vom Standpunkt einer noch zu definierenden Isomorphie (siehe 4.3) vollkommen verschieden. Den Unterschied machen die halbstationären und stationären Punkte an den Intervallenden aus.

3.4 Beispiel: Sei $[-\infty,\infty]$ die Zweipunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$. Der Fluß

$$\varphi_{\mathbb{R}}: [-\infty,\infty] \times \mathbb{R} \longrightarrow [-\infty,\infty] \quad , \quad (p,t) \longrightarrow p+t$$

heiße $\mathbb{R}$-Shift. Der Definitionsbereich des zugehörigen Erzeugers $\delta_{\mathbb{R}}$ ist

$$\mathcal{D}(\delta_{\mathbb{R}}) := \left\{ x \in C[-\infty,\infty] \,\middle|\, x \in C^1(\mathbb{R}),\ \lim_{p\to\infty} x'(p) = \lim_{p\to-\infty} x'(p) = 0 \right\},$$

und es gilt $\delta_{\mathbb{R}} x = x'$ für alle $x \in \mathcal{D}(\delta_{\mathbb{R}})$.

Die Punkte ∞ und $-\infty$ sind stationäre Punkte, genauer $\gamma_h(\varphi_{\mathbb{R}}) = \gamma(\varphi_{\mathbb{R}}) = \{-\infty,\infty\}$.

3.5 Beispiel: Sei $[0,\infty]$ die Einpunktkompaktifizierung der positiven reellen Zahlen. Der Halbfluß

$$\varphi_{\mathbb{R}_+}: [0,\infty] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,\infty] \quad , \quad (p,t) \longrightarrow p+t$$

heiße $\mathbb{R}_+$-Shift.

Man beachte, daß 0 kein halbstationärer Punkt ist, d.h. $\gamma_h(\varphi_{\mathbb{R}_+}) = \gamma(\varphi_{\mathbb{R}_+}) = \{\infty\}$.

Für den Definitionsbereich des Erzeugers gilt:

$$\mathcal{D}(\delta_{\mathbb{R}_+}) := \left\{ x \in C[0,\infty] \,\middle|\, x \in C^1[0,\infty),\ \lim_{p\to\infty} x'(p) = 0 \right\}.$$

Ferner ist $\delta_{\mathbb{R}_+} x = x'$ für alle $x \in \mathcal{D}(\delta_{\mathbb{R}_+})$.

3.6 Beispiel: Sei $[-\infty,0]$ die Einpunktkompaktifizierung der negativen reellen Zahlen. Der Halbfluß

$$\varphi_{\mathbb{R}_-} : [-\infty,0] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow [-\infty,0] , (p,t) \longmapsto \min(p+t,0) ,$$

heiße $\mathbb{R}_-$-Shift. $-\infty$ ist stationärer und 0 halbstationärer, aber nicht stationärer Punkt. Genauer gilt $\gamma_h(\varphi_{\mathbb{R}_-}) = \{0,\infty\} \supsetneq \gamma(\varphi_{\mathbb{R}_-}) = \{\infty\}$. Ferner ist

$$\mathcal{D}(\delta_{\mathbb{R}_-}) = \{ x \in C[-\infty,0] \mid x \in C^1(-\infty,0], \lim_{p\to\infty} x'(p) = 0 = \lim_{p\to 0} x'(p) \}$$

und $\delta_{\mathbb{R}_-} x = x'$ für alle $x \in \mathcal{D}(\delta_{\mathbb{R}_-})$.

3.7 Beispiel: Der Halbfluß

$$\varphi_{[-1,1]} : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow [-1,1] , (p,t) \longmapsto \min(p+t,1)$$

heiße $[-1,1]$-Shift. Ferner ist $\gamma_h(\varphi_{[-1,1]}) = \{1\}$ und $\gamma(\varphi_{[-1,1]}) = \phi$.

$$\mathcal{D}(\delta_{[-1,1]}) = \{ x \in C^1[-1,1] \mid x'(1) = 0 \}$$

und $\delta_{[-1,1]} x = x'$ für alle $x \in \mathcal{D}(\delta_{[-1,1]})$.

Das nächste Beispiel zeigt, wie man durch einen Homöomorphismus Flüsse von einem Kompaktum auf ein

anderes hinübertransportieren kann:

3.8 Beispiel: α,β seien reelle Zahlen, $\alpha<\beta$. Sei $l: [-1,1] \longrightarrow [\alpha,\beta]$ eine strikt monoton wachsende Funktion mit $l(-1)=\alpha$ und $l(1)=\beta$. Die Abbildung

$$\varphi_l: [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow [\alpha,\beta], \quad \varphi_l(p,t) := \begin{cases} \beta, \text{falls } l^{-1}(p)+t \geq 1 \\ l(l^{-1}(p)+t), \text{sonst} \end{cases},$$

ist ein Halbfluß, und es gilt:

$$\varphi_l(l(q),t) = l(\varphi_{[-1,1]}(q,t)) \quad \text{für alle } q \in [-1,1],\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Mit der eben behandelten Methode, aber mit fest vorgegebenen Homöomorphismen werden jetzt in 3.9 aus den "Shifts" 3.4-3.7 vier neue etwas "verzerrte Shifts" auf einem vorgegebenen Intervall $[\alpha,\beta]$ gewonnen. Diese werden dann die Bausteine in dem abschließenden Beispiel 3.10 bilden:

3.9 Beispiel: Es seien $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha<\beta$. Die folgenden vier Abbildungen sind stetig differenzierbare, strikt monoton wachsende Abbildungen, die die Intervallenden auf die Intervallenden abbilden:

$$l^1 : [-\infty,\infty] \longrightarrow [\alpha,\beta], \quad l^1_{\alpha,\beta}(p) := \alpha+(\beta-\alpha)\exp(1-\exp(-p))$$

$l^2_{\alpha,\beta}:[0,\infty] \longrightarrow [\alpha,\beta]$, $l^2_{\alpha,\beta}(p) := \alpha + \frac{\beta-\alpha}{e-1}(\exp(1-\exp(-p))-1)$,

$l^3_{\alpha,\beta}:[-\infty,0] \longrightarrow [\alpha,\beta]$, $l^3_{\alpha,\beta}(p) := \alpha+(\beta-\alpha)\exp(1-\exp(-p))$,

$l^4_{\alpha,\beta}:[-1,1] \longrightarrow [\alpha,\beta]$, $l^4_{\alpha,\beta}(p) := \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2}(p+1)$.

Setze ferner:

$$\mathcal{D}^1_{\alpha,\beta} = \{ x \in C[\alpha,\beta] \cap C^1(\alpha,\beta) \mid \lim_{|p| \to \infty} (l^1_{\alpha,\beta})'(p) x'(l^1_{\alpha,\beta}(p)) = 0 \},$$

$$\mathcal{D}^2_{\alpha,\beta} = \{ x \in C[\alpha,\beta] \cap C^1[\alpha,\beta) \mid \lim_{p \to \infty} (l^2_{\alpha,\beta})'(p) x'(l^2_{\alpha,\beta}(p)) = 0 \},$$

$$\mathcal{D}^3_{\alpha,\beta} = \{ x \in C[\alpha,\beta] \cap C^1(\alpha,\beta] \mid \lim_{p \to -\infty} (l^3_{\alpha,\beta})'(p) x'(l^3_{\alpha,\beta}(p)) = x'(\beta) = 0 \},$$

$$\mathcal{D}^4_{\alpha,\beta} = \{ x \in C^1[\alpha,\beta] \mid x'(\beta) = 0 \} .$$

Sei nun $k \in \{1,2,3,4\}$ fest und sei φ derjenige Shift aus 3.4-3.7, der zu dem Definitionsbereich von $l := l^k_{\alpha,\beta}$ gehört (z.B. wenn k=1 ist, sei $\varphi = \varphi_{\mathbb{R}}$).

Definiert man

$$\varphi^k_{\alpha,\beta} : [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow [\alpha,\beta] , \quad \varphi^k_{\alpha,\beta}(p,t) = l(\varphi(l^{-1}(p),t)) ,$$

so ist $\varphi^k_{\alpha,\beta}$ ein Fluß. Der Erzeuger δ_k der zugehörigen Morphismenhalbgruppe hat als Definitionsbereich $\mathcal{D}^k_{\alpha,\beta}$, und es gilt:

$$(\delta_k x)(p) = 1'(1^{-1}(p))x'(p) \text{ für } p \in [\alpha,\beta] \setminus \gamma(\varphi^k_{\alpha,\beta}) \ , \ x \in \mathfrak{D}^k_{\alpha\beta},$$

d.h. δ_k wirkt auf ein $x \in \mathfrak{D}^k_{\alpha,\beta}$ wie der Ableitungsoperator $\frac{d}{dp}$, multipliziert mit der stetigen Funktion $g^k_{\alpha,\beta} := 1' \circ (1^{-1})$ (vgl. auch 1.6).

Zwischen den (halb)stationären Punkten von $\varphi^k_{\alpha,\beta}$ und dem zu k "gehörigen" Halbfluß φ aus 3.4-3.7 besteht die Beziehung:

$$\gamma_h(\varphi^k_{\alpha,\beta}) = 1^k_{\alpha,\beta}(\gamma_h(\varphi)) \ , \quad \gamma(\varphi^k_{\alpha,\beta}) = 1^k_{\alpha,\beta}(\gamma(\varphi))$$

Bemerkung: Anstelle der 1^j würden andere "Diffeomorphismen" die ihnen zugedachte Aufgabe in 3.10 und in §4 ebenso gut erfüllen. Wichtig ist eigentlich nur, daß es solche gibt und daß diese im folgenden fest bleiben.

3.10 Beispiel: Sei X eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge von $[0,1]$. Dann hat $[0,1] \setminus X$ höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten $I_j = (\alpha_j, \beta_j)$, $j \in J$. Die Numerierung sei dabei so gewählt, daß $j \geq 2$ für diejenigen Intervalle ist, die weder die Null noch die Eins enthalten. Ist $0 \notin X$, so sei per definitionem $0 \in I_0 = [0, \beta_0)$, und entsprechend sei $1 \in I_1 = (\alpha_1, 1]$, wenn $1 \notin X$ ist.

Mit Hilfe der in 3.9 konstruierten Beispiele bauen wir nun Halbflüsse in $[0,1]$ zusammen, die X "fest" las-

sen und gewissermaßen das Innere der Intervalle I_j nach rechts (für j=1 nach links) in die Endpunkte β_j (bzw. für j=1 in den Endpunkt α_1) schieben.

Dazu sei $\tau: J \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ eine Abbildung, die $\{j \in J \mid j \geq 2\}$ in die Menge $\{1,3\}$ und $\{j \in J \mid j \in \{0,1\}\}$ nach $\{2,4\}$ abbildet. Sei nun $\varphi^\tau: [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ definiert durch

$$\varphi^\tau(p,t) := \begin{cases} \varphi^{\tau(j)}_{\alpha_j,\beta_j}(p,t) & \text{,falls } p \in I_j \text{ ,} j \geq 2 \\ \varphi^{\tau(0)}_{0,\beta_0}(p,t) & \text{,falls } p \in I_0 \text{ ,} 0 \notin X \\ -\varphi^{\tau(1)}_{-1,-\alpha_1}(p,t) & \text{,falls } p \in I_1 \text{ ,} 1 \notin X \\ p & \text{,falls } p \in X \end{cases}$$

(Bezeichnungen wie in 3.9).

Dann ist φ^τ ein Halbfluß, und $x \in C[0,1]$ ist aus dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(\delta^\tau)$ des Erzeugers δ^τ von φ^τ genau dann, wenn x eingeschränkt auf $[\alpha_j,\beta_j]$ in $\mathcal{D}^{\tau(j)}_{\alpha_j,\beta_j}$ (j≠1) liegt und falls $1 \notin X$ die auf $[-1,\alpha_1]$ definierte Abbildung $\tilde{x}: q \longmapsto x(-q)$ Element von $\mathcal{D}^{\tau(1)}_{-1,-\alpha_1}$ ist.

Insbesondere sind alle in [0,1] stetig differenzierbaren Funktionen in $\mathcal{D}(\delta^\tau)$, deren Ableitung auf dem topologischen Rand von X verschwinden. Genauer ist für $x \in \mathcal{D}(\delta^\tau)$

$$\delta^{\tau}x(q) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } g^{\tau}(q) = 0 \\ g^{\tau}(q)\,\frac{dx}{dp}(q) & \text{, sonst} \end{cases},$$

wobei g^{τ} die auf folgende Weise aus den $g^{k}_{\alpha_j,\beta_j}$ in 3.9 zusammengesetzte Funktion ist:

$$g^{\tau}(p) := \begin{cases} g^{\tau(j)}_{\alpha_j,\beta_j}(p)x'(p) & \text{, wenn } p \in (\alpha_j,\beta_j) \\ g^{\tau(0)}_{0,\beta_0}(p)x'(p) & \text{, wenn } p \in [0,\beta_0) \text{ und } 0 \notin X \\ -g^{\tau(1)}_{\alpha_1,1}(-p)x'(p) & \text{, wenn } p \in (\alpha_1,1] \text{ und } 1 \notin X \\ 0 & \text{, wenn } p \in X\ . \end{cases}$$

Wenn sogar $\tau(J) \subset \{1\}$ und $0,1 \in X$ sind, läßt sich φ^{τ} in kanonischer Weise zu einem Fluß mit der Eigenschaft $C^1[0,1] \subset \mathcal{D}(\delta^{\tau})$ fortsetzen.

§4 Problem (II)

(Die Morphismenhalbgruppen auf $C[0,1]$)

Ein Fluß φ auf dem Einheitskreis S^1 wird weitgehend (d.h. bis auf einen "Geschwindigkeitswechsel") durch die Menge der stationären Punkte $\gamma(\varphi)$ festgelegt. Ist nämlich $\gamma(\varphi) \neq \phi$, $p \in \gamma(\varphi)^c$, und I die Zusammenhangskompo-

nente von $S^1 \setminus \gamma(\varphi)$, in der p liegt, so ist $\lim_{t \to -\infty} \varphi(p,t) = p_{-\infty}$ der eine Randpunkt und $\lim_{t \to \infty} \varphi(p,t) = p_\infty$ der andere Randpunkt von I. Die Limiten $p_{-\infty}$ und p_∞ werden niemals in endlicher Zeit erreicht, der Abstand von $\varphi(p,t)$ zu p_∞ (bzw. $\varphi(p,t)$ zu $p_{-\infty}$) wird aber für wachsende (bzw. fallende) t strikt kleiner. Um bei der Sprache der Flüsse zu bleiben: p "entsprang" vor unendlicher Zeit in $p_{-\infty}$ und "mündet" in unendlicher Zeit in p_∞.

Wie die Beispiele des vorangehenden Paragraphen zeigen, treten bei Halbflüssen neue Phänomene auf (vgl.3.6-3.7). Bei genauem Hinsehen stellt sich die Situation aber als nur wenig schwieriger (dafür formal um so komplizierter) heraus,und es lassen sich alle Halbflüsse auf das Beispiel 3.10 zurückführen (siehe 4.7). Die auf diese Weise damit automatisch gewonnene Charakterisierung aller Morphismenhalbgruppen (zusammen mit ihren Erzeugern) auf $C[0,1]$ läßt sich zur Beantwortung von Problem (II) (siehe Einleitung in diesem Kapitel) benutzen. Dabei stellt sich heraus, daß nicht einmal dann, wenn δ Erzeuger einer Morphismengruppe ist, δ sich in der Form $f\frac{d}{dx}$ schreiben läßt (siehe 4.5). Schuld daran sind die verschiedenen "Differenzierbarkeitsstrukturen", die sich auf $[0,1]$ erklären lassen. So gilt denn auch für jeden Erzeuger einer Morphismenhalbgruppe $\delta = f\frac{\tilde{d}}{dx}$, $f \in C[0,1]$, wenn man $\frac{\tilde{d}}{dx}$ nur als "geeigneten Ableitungsoperator" interpretiert (siehe Schluß dieses Paragraphen).

In 4.1 sind einige wohlbekannte Tatsachen über Halbflüsse aufgelistet, deren Beweise dem Leser überlassen seien.

4.1 Lemma: Ist $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine Morphismenhalbgruppe mit Erzeuger $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$ und Halbfluß φ, so gilt:

(i) $\gamma_h(\varphi)$ ist abgeschlossen und $\gamma(\varphi) \subset \gamma_h(\varphi) = \gamma(\delta)$. Die Inklusion ist i.a. echt (Vgl. 3.6, 3.7).

(ii) Ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver, gegen Null konvergenter reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \varphi(p,t_n) = p$, dann ist $p \in \gamma_h(\varphi)$.

(iii) Existiert für $p \notin \gamma_h(\varphi)$ ein $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit $\varphi(p,t) = p$, so gibt es ein $t_o \in (0,t]$ mit $\varphi(p,t_o) = p$ und $p \neq \varphi(p,s)$ für alle $s \in (0,t_o)$. t_o heißt Periode des periodischen Punktes p.

(iv) Ist p ein periodischer Punkt, so sind auch alle Punkte der Form $\varphi(p,t)$ periodische Punkte mit der gleichen Periode.

(v) Ist φ ein Fluß, so ist $\gamma(\varphi) = \gamma(\delta)$.

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel zum weiteren Vorgehen. Man vergleiche dazu auch die Beispiele 3.4-3.7 und deren (halb)stationäre Punkte.

4.2 Lemma: Sei $-\infty < \alpha \leq \beta < +\infty$ und sei $\varphi: [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow [\alpha,\beta]$ ein Halbfluß, der in (α,β) keine halbstationären Punkte hat.

(i) Sei $p \in (\alpha,\beta)$, $\varphi(p,t) > p$ für ein $t > 0$ und $\varphi(p,t) \neq \beta$. Dann ist die Abbildung $\varphi_p: [0,t] \longmapsto [p,\varphi(p,t)]$, $s \longmapsto \varphi(p,s)$, strikt monoton wachsend.

(ii) Ist $p \in (\alpha,\beta)$ und $\varphi(p,t) > p$ für ein $t > 0$, dann existiert für alle $q \in (\alpha,p)$ (bzw. $q \in (p,\beta)$) ein $s \in \mathbb{R}_+$ mit $\varphi(q,s) = p$ (bzw. $\varphi(p,s) = q$).

(iii) α oder β ist halbstationär.

(iv) Ist $\beta \in \gamma_h(\varphi) \setminus \gamma(\varphi)$, so ist $\alpha \in \gamma(\varphi) \cup (\gamma_h(\varphi)^c)$ (d.h. ist β halbstationär, aber nicht stationär, so ist α regulär oder stationär).

Beweis: (i) Da es in (α,β) keine halbstationären Punkte geben soll und da die Abbildung $\varphi_p: s \longmapsto \varphi(p,s)$ stetig ist, genügt es für $q \in (\alpha,\beta)$ zu zeigen, daß $\varphi(q,t) \neq q$ für alle $t > 0$ ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann existiert ein periodischer Punkt q mit Periode t_o. Man überzeugt sich nun leicht, daß es $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $0 < t_1 < t_2 < t_o$, derart gibt, daß $\varphi(q,t_1)$ im Inneren des von q und $\varphi(q,t_2)$ gebildeten Intervalles liegt.

Da die Menge $M := \varphi(\varphi(q,t_2), [0,t_o - t_2])$ zusammenhän-

hängend ist und die Punkte $q, \varphi(q,t_2)$ enthält, ist auch $\varphi(q,t_1) \in M$. Man findet also ein $\bar{t} \in (0, t_o - t_2)$ mit

$$\varphi(q,t_1) = \varphi(\varphi(q,t_2),\bar{t}) = \varphi(\varphi(q,t_1),\bar{t}+t_2-t_1).$$

Die Ungleichung $0 < \bar{t}+t_2-t_1 < t_o$ steht nun offenbar im Widerspruch zu der Annahme, daß t_o die Periode von $\varphi(q,t_1)$ ist (vgl. 4.1 (iv)).

(ii) Sei $p \in (\alpha,\beta)$ und sei $\varphi(p,t) > p$ für ein $t > 0$. Setze:

$$B_o := \{ q \in [\alpha,\beta] \mid \text{es existiert ein } t \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } \varphi(q,t) = p \},$$

$$B_1 := \{ q \in [\alpha,\beta] \mid \text{es existiert ein } t \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } \varphi(p,t) = q \}.$$

Dann sind B_o und B_1 nicht leer, denn $p \in B_o \cap B_1$. Aus Stetigkeitsgründen und unter Zuhilfenahme von (i) folgt, daß $\sup B_1 \in \gamma_h(\varphi)$ und damit gleich β sein muß. Wäre $\inf B_o \neq \alpha$, so ließe sich ebenfalls unter Verwendung von (i) schließen, daß $\inf B_o \in \gamma_h(\varphi)$ wäre – im Widerspruch zur Voraussetzung $\gamma_h(\varphi) \cap (\alpha,\beta) = \phi$.

(iii) Wenn es ein $p \in (\alpha,\beta)$ mit $\varphi(p,t) > p$ (bzw. $\varphi(p,t) < p$) gibt, so folgt aus (ii): $\beta \in \gamma_h(\varphi)$ (bzw. $\alpha \in \gamma_h(\varphi)$).

(iv) Angenommen: $\alpha,\beta \in \gamma_h(\varphi) \setminus \gamma(\varphi)$. Dann gibt es $q_\alpha, q_\beta \in (\alpha,\beta)$, $t_\alpha, t_\beta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\alpha = \varphi(q_\alpha, t_\alpha) \quad \text{und} \quad \beta = \varphi(q_\beta, t_\beta)$$

Ist $q_\alpha < q_\beta$, so existiert nach (ii) $(q := q_\beta)$ ein $s \in \mathbb{R}_+$ mit $\varphi(q_\alpha, s) = q_\beta$. Egal ob

$$t_\alpha \leq s + t_\beta \quad \text{und damit} \quad \varphi(\alpha, s - t_\alpha + t_\beta) = \beta \quad \text{oder}$$

$$t_\alpha \geq s + t_\beta \quad \text{und damit} \quad \varphi(\beta, t_\alpha - s - t_\beta) = \alpha$$

gilt, beide Aussagen stehen im Widerspruch zu $\alpha, \beta \in \gamma_h(\varphi)$.

Für $q_\beta \geq q_\alpha$ gelangt man auf ähnliche Weise zu einem Widerspruch. □

Bevor wir an die "Charakterisierung" der Morphismenhalbgruppen auf $C[0,1]$ gehen, benötigen wir natürlich noch einen Isomorphiebegriff.

4.3 Definition: Seien φ_1, φ_2 (Halb)flüsse auf K_1 bzw. K_2. φ_1 heißt zu φ_2 isomorph, wenn es einen stetigen Homöomorphismus $l: K_1 \longrightarrow K_2$ derart gibt, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ $(t \in \mathbb{R}_+)$, $p \in K_1$

$$\varphi_1(l(p), t) = l(\varphi_2(p), t)$$

gilt. Zwei Morphismenhalbgruppen (Morphismengruppen)

auf $C(K_1)$ bzw. $C(K_2)$ heißen isomorph, wenn die dazugehörigen Halbflüsse (Flüsse) isomorph sind.

4.4 Bemerkungen: (i) l bildet die (halb)stationären Punkte von φ_1 auf die (halb)stationären Punkte von φ_2 ab, d.h.:

$$l(\gamma(\delta)) = l(\gamma_h(\varphi_1)) = \gamma_h(\varphi_2) = \gamma(\delta) \quad \text{und}$$

$$l(\gamma(\varphi_1)) = \gamma(\varphi_2).$$

(ii) Sind $\{T_1(t)\}_{t\in \mathbb{R}_+}, \{T_2(t)\}_{t\in \mathbb{R}_+}$ zwei zueinander unter $l: K_1 \longrightarrow K_2$ isomorphe Morphismenhalbgruppen auf $C(K_1)$ bzw. $C(K_2)$ mit Erzeugern $(\delta_1, \mathcal{D}(\delta_1))$, $(\delta_2, \mathcal{D}(\delta_2))$ und ist $T_l: C(K_2) \longrightarrow C(K_1)$ die Abbildung $x \longmapsto x\circ l$, so gilt für alle $x \in \mathcal{D}(\delta_2)$

$$T_l(\mathcal{D}(\delta_2)) = \mathcal{D}(\delta_1) \quad \text{und} \quad T_l\delta_2 x = \delta_1 T_l x.$$

Die Beweise sind leicht zu führen und deshalb dem Leser überlassen.

Das folgende Beispiel zeigt, daß sich nicht alle Derivationen $(\delta, \mathcal{D}(\delta))$ in $C[0,1]$, die Erzeuger von Morphismen(halb)gruppen sind, in der Form $\delta = g\frac{d}{dp}$ schreiben lassen.

4.5 Beispiel: Betrachte 3.8. Sei $l:[-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ eine strikt monoton wachsende Abbildung, deren Ableitung l' fast überall verschwindet, d.h. es existiert eine Menge M mit Lebesgue-Maß Eins und $l'(p)=\{0\}$ für alle $p \in M$ (Vgl. z.B. H.L. Royden [1968], Teil 1, 5.4 Problem 12c).

Ist $(\delta_l, \mathcal{D}(\delta_l))$ der Erzeuger der von φ_l (siehe 3.8) induzierten Morphismenhalbgruppe, so haben wir eben gesehen (4.4), daß genau dann $x \in \mathcal{D}(\delta_l)$ ist, wenn $x \circ l \in \mathcal{D}(\delta_{[-1,1]})$ gilt, $x \circ l$ also insbesondere stetig differenzierbar ist.

Sei nun $x \in \mathcal{D}(\delta_l)$ und sei x auf einem offenen Intervall I stetig differenzierbar. Dann ist $J := l^{-1}(I)$ ebenfalls ein Intervall, und aufgrund der Wahl von l

$$(x \circ l)'(p) = x'(l(p))l'(p) = 0 \quad \text{für alle } p \in J \cap M.$$

$J \cap M$ ist aber dicht in J und demnach x konstant auf I.

Da jedes $x \in \mathcal{D}(\delta_{[-1,1]})$ stetig differenzierbar auf ganz $[-1,1]$ ist, besteht $\mathcal{D}(\delta_{[-1,1]}) \cap \mathcal{D}(\delta_l)$ nur aus konstanten Funktionen, eine Darstellung von δ_l als $g\frac{d}{dp}$ ist demnach unmöglich.

Bei der Analyse des eben untersuchten Beispiels stellt man fest, daß $\mathcal{D}(\delta_1)$ offenbar die C^1-Funktionen sind, deren Ableitungen im Punkte 1 verschwinden, wenn man $[0,1]$ zusammen mit dem Atlas $\{1\}$ als differenzierbare Mannigfaltigkeit (mit Rand) betrachtet. δ_1 ist dabei nichts anderes als der "Ableitungsoperator" bezüglich dieser Differenzierbarkeitsstruktur.

Das folgende Theorem bereitet die Charakterisierung der Morphismenhalbgruppen auf $C[0,1]$ vor.

4.6 Theorem: Sei $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ und sei $\varphi: [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow [\alpha,\beta]$ ein Halbfluß, der in (α,β) keine halbstationären Punkte hat.

(i) Sind α und β stationär, so ist φ zu $\varphi_{\mathbb{R}}$ (siehe 3.4) isomorph.

(ii) Ist α stationär und β regulär oder β stationär und α regulär, so ist φ zu $\varphi_{\mathbb{R}_+}$ (siehe 3.5) isomorph.

(iii) Ist α stationär und β halbstationär, aber nicht stationär oder β stationär und α halbstationär, aber nicht stationär, so ist φ zu $\varphi_{\mathbb{R}_-}$ (siehe 3.6) isomorph.

(iv) Ist α halbstationär, aber nicht stationär und β regulär oder β halbstationär, aber nicht stationär und α regulär, so ist φ zu $\varphi_{[-1,1]}$ (siehe 3.7) isomorph.

Beweis: Stellvertretend für die Aussagen (i)-(iv) wird hier nur der ersten Teil von (iii) bewiesen. Mit leichten Modifikationen ergeben sich ganz analog die Punkte (i), (ii), (iv) und der zweite Teil von (iii).

Sei also $\alpha \in \gamma(\varphi)$, $\beta \in \gamma_h(\varphi) \setminus \gamma(\varphi)$. Da $\gamma_h(\varphi) \setminus \gamma(\varphi) \neq \phi$ ist, gibt es ein $p \in (\alpha,\beta)$ und ein $t \in \mathbb{R}_+$ mit $\varphi(p,t)=\beta$. Wählt man $n_o > 0$ so groß, daß $\alpha + \frac{1}{n_o} < p$ ist, dann findet sich zu jedem $n > n_o$ ein $t_n \in \mathbb{R}_+$ mit der Eigenschaft $\varphi(\alpha + \frac{1}{n}, t_n) = \alpha + \frac{1}{n-1}$ (4.2 (ii)). Da $\alpha \in \gamma(\varphi)$ ist, muß $\sum_{n=n_o+1}^{\infty} t_n = \infty$ gelten. Zu jeder natürlichen Zahl $m > 0$ gibt es infolgedessen nach 4.2 (i),(ii) genau ein $\alpha_m \in (\alpha,\beta)$ mit $\varphi(\alpha_m,m)=\beta$. Die Abbildungen

$$l_m: [-m,0] \longrightarrow [\alpha_m,\beta] \ , \ p \longmapsto \varphi(\alpha_m, m+p) \ ,$$

sind Homöomorphismen und aufgrund der Halbgruppeneigenschaft von φ ist l_{m_1} eine Fortsetzung von l_{m_2}, wenn $m_1 > m_2$ ist.

Da ferner $\lim_{m \to \infty} \alpha_m = \alpha$ gilt, ist die Abbildung

$$l: [-\infty,0] \longrightarrow [\alpha,\beta] \ , \ l(p) := \begin{cases} l_m(p) \ , \text{falls } p \in [\alpha_m,\beta] \\ \alpha \quad , \text{falls } p = -\infty \end{cases} \ ,$$

wohldefiniert und, wie man unschwer sieht, stetig.

Für $p \in [-m,0]$, $t \in [0,m]$ folgt:

$$1(\varphi_{\mathbb{R}_-}(p,t)) = 1_m(p+t) = \varphi(\alpha_m, m+p+t) = \varphi(\varphi(\alpha_m, m+p), t)$$

$$= \varphi(1(p),t)$$

und

$$1(\varphi_{\mathbb{R}_-}(-\infty,t)) = 1(-\infty) = \alpha = \varphi(\alpha,t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Damit ist der erste Teil von Aussage (iii) bewiesen. □

Ist nun φ ein beliebiger Halbfluß auf $[0,1]$, so ist $\gamma_h(\varphi)$ eine abgeschlossene Teilmenge, deren Komplement höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten I_j hat. Die Randpunkte der I_j liegen in $\gamma_h(\varphi) \cup \{0,1\}$, und $\varphi(\overline{I}_j \times \mathbb{R}_+) \subset \overline{I}_j$. Theorem 4.6 und Beispiel 3.10 ergeben deshalb:

4.7 Korollar: Jeder Halbfluß auf $[0,1]$ ist für eine geeignete Abbildung $\tau: J \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ isomorph zu φ^τ in 3.10.

Nach der negativen Antwort auf Problem (II) (siehe 4.5), folgt jetzt die positive!

$\varphi\colon [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ sei ein Halbfluß. Dann existiert nach 4.7 eine Abbildung τ (siehe 3.10) und ein Isomorphismus $1\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, der φ^τ in φ überführt, d.h.

$$\varphi(1(q),t) = 1(\varphi^\tau(q,t)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+ \text{ und } q \in K .$$

Weiter sei $Y \subset [0,1]$ offen und

$$C_1^1(Y) := \{ x \in C[0,1] \mid x \circ 1 \in C^1(1^{-1}(Y)) \} .$$

Setze

$$\frac{\tilde{d}}{dp}\colon C_1^1(Y) \longrightarrow C(Y), \quad \frac{\tilde{dx}}{dp}(q) := (x \circ 1)'(1^{-1}(q)) \qquad (x \in C_1^1(Y), q \in Y)$$

und

$$h\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad p \longrightarrow g^\tau(1^{-1}(p)) ,$$

wobei g^τ wie in 3.10 definiert sei.

Für alle x aus dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\delta)$ des Erzeugers δ der von φ induzierten Morphismenhalbgruppe gilt $x \circ 1 \in \mathfrak{D}(\delta^\tau)$ nach 4.4 (ii). Demnach ist $x \circ 1$ in $\gamma_h(\varphi^\tau)^c = \gamma_h(\varphi)^c$ stetig differenzierbar und $x \in C_1^1(\gamma_h(\varphi)^c)$.

Das liefert für $q \in \gamma_h(\varphi)^c$:

$$\delta x(q) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(x\circ l(l^{-1}(\varphi(q,t))) - x\circ l(l^{-1}(q))\right)$$

$$= (x\circ l)'(l^{-1}(q)) \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\varphi^{\tau}(l^{-1}(q),t) - l^{-1}(q)\right)$$

$$= g^{\tau}(l^{-1}(q)) \frac{\tilde{d}x}{dp}(q)$$

$$= h(q) \frac{\tilde{d}x}{dp}(q) .$$

Dies charakterisiert alle Derivationen, die Erzeuger von Morphismenhalbgruppen sind (siehe Problem II).

4.8 Bemerkung: (i) Die Darstellung von δ als $h \frac{\tilde{d}}{dx}$ ist nicht eindeutig.

(ii) Die Halbflüsse auf $\mathbb{R}$ lassen sich aufgrund der Homöomorphie von $[-\infty,\infty]$ und $[0,1]$ ähnlich aus den Beispielen 3.4-3.7 "zusammenkleben".

In S^1 liegt die Situation etwas anders. Dort ist ein Halbfluß entweder isomorph zu 3.1 oder er läßt sich aus den Beispielen 3.4 und 3.6 zusammensetzen. 3.5 und 3.7 kommen aus topologischen Gründen als "Bausteine" nicht in Betracht.

Mit einer (im Sinne der hier gewonnenen Antwort) das Problem II verallgemeinernden Frage möchte ich dieses I. Kapitel schließen.

Problem: Kommt jede (eine Morphismen(halb)gruppe erzeugende) Derivation in $C([0,1]^n)$ von einem Vektorfeld bezüglich einer geeigneten "Differenzierbarkeitsstruktur" auf $[0,1]^n$, d.h. gibt es einen Homöomorphismus $l:[0,1]^n \longrightarrow [0,1]^n$ mit

$$x(q) = h_1(q)\frac{\partial(x\circ l)}{\partial p_1}(l^{-1}(q)) + \ldots + h_n(q)\frac{\partial(x\circ l)}{\partial p_n}(l^{-1}(q)).$$

für alle $x \in \mathfrak{D}(\delta)$, $q \in [0,1]^n$?

In Anbetracht des "Flowbox-Theorems" würde ich zu "ja" tendieren.

K A P I T E L II

Verbandshalbgruppen und ihre Erzeuger

Die Normabbildung auf Banachräumen ist von vielen Autoren auf ihre Differenzierbarkeitseigenschaften hin untersucht worden (M. M. Day [1973]). Zusätzlich zu den sich daraus ergebenen Rückschlüssen auf die Struktur von Banachräumen lassen sich die Ergebnisse in verschiedenen Bereichen anwenden.

Neben der Normfunktion hat man in (reellen und komplexen) Banachverbänden eine weitere Abbildung, die Betragsabbildung $\ominus: x \longmapsto |x|$. Vielleicht wäre dies (vom Standpunkt der reinen Mathematik aus) schon Grund genug,zu fragen, ob und in "welchem Sinne" $\ominus$ differenzierbar ist. Wie wir noch sehen werden, hängt nämlich die Art der Differenzierbarkeit von $\ominus$ vom Typ der Normierung des Banachverbandes ab (vgl. 1.5).

Die Gründe, die allerdings mich zu dieser Untersuchung veranlaßt haben, sind in Wahrheit anderer Natur gewesen,und ich möchte diese als "Motivation" im folgenden kurz klarstellen:

Dazu sei $(A,\mathcal{D}(A))$ der Erzeuger einer starkstetigen Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ auf einem Banachverband E. Zunächst einmal war es mein Wunsch, Kriterien für das

Paar $(A,\mathcal{D}(A))$ anzugeben, die es zu entscheiden erlauben, ob $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine Verbandshalbgruppe, d.h. eine starkstetige Halbgruppe von Verbandshomomorphismen, ist. Für Erzeuger von Verbandshalbgruppen auf $C(K)$ haben R. Derndinger - R. Nagel [1979] gezeigt, daß diese sich als Summe einer Derivation und eines Multiplikators schreiben lassen. Aus ordnungstheoretischer Sicht besteht jedoch der Nachteil dieser Charakterisierung in der Verwendung der algebraischen Struktur von $C(K)$, denn eine Multiplikation in beliebigen Banachverbänden ist nicht vorgegeben.

Kehren wir deshalb noch einmal zu Satz I.2.3 zurück, der besagte, daß der Erzeuger einer starkstetigen Halbgruppe von $*$-Algebrahomomorphismen eine Derivation ist und daß die Umkehrung ebenfalls gilt. Setzt man

$$\Phi : C(K)\times C(K) \longrightarrow C(K) \quad , \quad (x,y) \longmapsto xy \quad ,$$

so bedeutete I.2.3 für eine starkstetige Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit Erzeuger $(\delta,\mathcal{D}(\delta))$ gerade die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) $\Phi(S(t),S(t)) = S(t)\circ\Phi \qquad (t\in\mathbb{R}_+)$

(ii) $D\Phi\big|_{(x,y)}(\delta x,\delta y) = \delta\Phi(x,y) \qquad (x,y\in\mathcal{D}(\delta))$

Bewiesen wurde dies durch Anwendung der "Kettenregel" auf

$$t \longmapsto \Phi(\eta_x(t),\eta_y(t)) \quad \text{und} \quad t \longmapsto T(\tau-t)\Phi(\eta_x(t),\eta_y(t)),$$

wobei $\eta_z:\mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ für $z\in\mathcal{D}(A)$ die Abbildung $t \longmapsto T(t)z$ war.

Es liegt deshalb nahe, für Banachverbände analog vorzugehen, indem man Θ anstelle von φ untersucht und entsprechend die Abbildungen

$$t \longmapsto \Theta(\eta_x(t)) \quad \text{und} \quad t \longmapsto T(\tau-t)\Theta(\eta_x(t))$$

mit der Kettenregel "behandelt". Das wirft zwei Probleme auf:

(a) Ist Θ überhaupt differenzierbar?
In §1 wird dieser Frage nachgegangen.

(b) Wann ist mit $x\in\mathcal{D}(A)$ auch $\Theta(x)=|x|\in\mathcal{D}(A)$?

Die Beispiele in I.3 zeigen nämlich, daß $\mathcal{D}(A)$ i.a. kein Verband ist. M. Wolff ([1978], 1.7) weist sogar nach, daß in C(K)-Räumen (und einer weiteren Anzahl von Banachverbänden) nur für normstetige Verbandshalbgrup-

pen der Definitionsbereich des Erzeugers ein Verband (und damit $\mathfrak{B}(A) = C(K)$) sein kann.

Die Paragraphen 2, 3 und 4 geben eine Antwort auf (b) im Zusammenhang mit der Charakterisierung der Erzeuger von Verbandshalbgruppen.

§1 Differentiation der Betragsabbildung in Banachverbänden

In einem Banachverband E ist das von einem Element $x \in E$ erzeugte Ideal $E_{|x|} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ y \in E \mid |y| \in [0, n|x|] \}$ mit der Norm $r(z) := \inf \{ \lambda > 0 \mid |z| \in [0, \lambda|x|] \}$ ein AM-Raum mit Einheit und als solcher nach dem Darstellungssatz von Kakutani isomorph zu einem C(K), K kompakt (vgl. H.H. Schaefer [1974], II.7.2, II.7.3, jeweils die Korollare). Ferner ist der Abschluß $\overline{E}_{|x|}$ in der Norm von E isomorph zu einem Verband stetiger numerischer (d.h. auf einer raren Menge möglicherweise ∞-wertiger) Funktionen E(K) auf K (H.H. Schaefer [1974], III.4.5).

Ist E ein (komplexer oder reeller) Banachverband mit quasiinnerem Punkt v (d.h. $\overline{E}_v = E$), $x \in E$ und $|x|$ ebenfalls ein quasiinnerer Punkt und ist ferner $I: E \longrightarrow E(K)$ der erwähnte Isomorphismus, dann definieren wir

$$Sg_x : E \longrightarrow E \quad , \quad z \longmapsto \mathrm{Re}\left(I^{-1}\left(\frac{I(x^*)}{I(|x|)}\, I(z)\right)\right).$$

Sg_x heiße Signumsoperator zu x. Es handelt sich um eine reellineare (d.h. $Sg_x(\alpha y+z) = \alpha Sg_x(y) + Sg_x(z)$ für alle $y,z \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$), stetige Kontraktion, deren Definition unabhängig von v ist. Sei nämlich u ein anderer quasiinnerer Punkt und $J:E \longrightarrow E(\tilde{K})$ der zugehörige Isomorphismus, dann gibt es einen Homöomorphismus $\varphi: K \longrightarrow \tilde{K}$ derart, daß $y \longmapsto (I(u))y \circ \varphi$ einen Isomorphismus H von $E(\tilde{K})$ auf E(K) definiert und $I = H \circ J$ ist (H.H. Schaefer [1974] ,III.4.5). Für $z \in E$ gilt:

$$I^{-1}\left(\frac{I(x^*)}{I(|x|)}\, I(z)\right) = I^{-1}\left(\frac{HJ(x^*)}{HJ(|x|)}\, HJ(z)\right)$$

$$= I^{-1}\left(H\left(\frac{J(x^*)}{J(|x|)}\, J(z)\right)\right)$$

$$= J^{-1}\left(\frac{J(x^*)}{J(|x|)}\, J(z)\right) .$$

Wir schreiben deshalb anstelle von $Re(I^{-1}(\frac{I(x)}{I(|x|)}I(z)))$ meist einfacher $Re(\frac{x^*}{|x|}\, z)$ und meinen Multiplikation und Division in irgendeiner Darstellung von E als Funktionenraum.

Um die Betragsfunktion abzuleiten, benötigt man noch einen geeigneten Differenzierbarkeitsbegriff, denn Beispiele zeigen, daß Θ i.a. weder Fréchet- noch Gateaux-differenzierbar in allen $x \in E$ ist (vgl. 1.5).

1.1 Definition: Es seien E,F Banachräume, $U \subset E$ offen und konvex, $x \in U$, $y \in E$ und M eine Teilmenge von E. Ferner sei $\Phi : U \longrightarrow F$ eine Abbildung.

(i) Φ heißt in x partiell nach y differenzierbar, wenn es ein $z \in F$ mit $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \| \Phi(x+ty) - \Phi(x) - tz \| = 0$ gibt. z nennen wir die partielle Ableitung von x nach y und schreiben $D\Phi|_x(y)$ anstelle von z.

(ii) Φ heißt partiell nach M differenzierbar in x, wenn Φ in x partiell nach y für alle $y \in M$ differenzierbar ist, und heißt Gâteauxdifferenzierbar, wenn Φ partiell nach E differenzierbar ist. Die Abbildung

$$D\Phi|_x : E \longrightarrow F \quad , \quad y \longrightarrow D\Phi|_x(y) \ ,$$

nennen wir die (rechtsseitige) Gâteauxableitung von Φ in x.

(iii) Φ heiße (Fréchet)differenzierbar in x, wenn es eine stetige, lineare Abbildung $\Phi'|_x : E \longrightarrow F$ mit

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{1}{\|y\|} \| \Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi'|_x(y) \| = 0 \text{ für alle } y \in E$$

gibt.

Bemerkung: Man beachte, daß sich die hier gewählte Terminologie etwas von der üblicherweise verwendeten (vgl. z.B. E. Klingbeil [1972]) unterscheidet, indem in (i) nur der rechtsseitige Grenzwert gebildet wird.

Mit Ausnahme der Korollare 1.4 und 1.8 bleiben aber alle Aussagen von §1 auch bei beidseitiger Limesbildung richtig, wie die Beweise zeigen.

1.2 Theorem: Sei E ein Banachverband, $x \in E$ und $|x|$ ein quasiinnerer Punkt von E. Dann ist $\Theta : E \longrightarrow E \ , \ z \longmapsto |z|$ Gâteauxdifferenzierbar in x und $D\Theta|_x = Sg_x$.

Beweis: Es genügt, die Aussage für komplexe Banachverbände zu beweisen.

Sei also E ein komplexer Banachverband und $E_{\mathbb{R}}$ der zugrundeliegende reelle Anteil. Das von $x = x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in E_{\mathbb{R}}$, erzeugte Ideal $E_{|x|}$ ist, wie schon erwähnt, isomorph zu einem C(K), K kompakt. Der Isomorphismus bildet dabei $|x|$ auf die Einsfunktion $\mathbb{1} \in C(K)$ ab. $E_{|x|}$ wird auf diese Weise zu einer C^*-Algebra mit Einheit $|x|$, d.h. Elemente aus $E_{|x|}$ können unter dieser Identifizierung miteinander multipliziert werden.
Ist nun $z = z_1 + iz_2 \in E$, $z_1, z_2 \in E_{\mathbb{R}}$, und $|z| \leq \frac{1}{2}|x|$, so gilt nach der Cauchy- Schwarzschen Ungleichung

$$|x_1 z_1 \mp x_2 z_2|^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(z_1^2 + z_2^2) = |x|^2 |z|^2 = |z|^2$$

und infolgedessen:

(1.2.1) $$\big||x+z| + |x| + x_1z_1 + x_2z_2\big| \geq |x+z| + |x| - |z| \geq |x|.$$

Man berechnet:

$$|\Theta(x+z) - \Theta(x) - Sg_x z|$$

$$= \big||x+z| - |x| - (x_1z_1 + x_2z_2)\big|$$

$$\leq \big|\,|x+z|^2 - (|x| + (x_1z_1 + x_2z_2))^2\big| \qquad (1.2.1)$$

$$= \big|(x_1+z_1)^2 + (x_2+z_2)^2 - (|x|^2 + 2(x_1z_1+x_2z_2) + (x_1z_1+x_2z_2)^2)\big|$$

$$= |z_1^2 + z_2^2 - (x_1^2z_1^2 + 2x_1z_1x_2z_2 + x_2^2z_2^2)|$$

$$= |x_2z_1 - x_1z_2|^2 \leq |z|^2.$$

Insgesamt erhält man für alle $z \in E$, $|z| \leq \frac{1}{2}|x|$:

(1.2.2) $$|\Theta(x+z) - \Theta(x) - Sg_x z| \leq |z|^2.$$

Für $z \in E$, $|z| \in \left[0, \frac{1}{2}|x|\right]$, existiert demzufolge die partielle Ableitung von x nach z. Durch Rückführung auf diesen Spezialfall wird nun die partielle Differenzierbarkeit von Θ in x nach "allen Richtungen" $y \in E$ gezeigt.

Sei also $y \in E$ und $\varepsilon \in (0,1)$. Da $E_{|x|}$ dicht in E ist,

gibt es ein $\tilde{y} \in E_{|x|}$ mit $\|y - \tilde{y}\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
Wählt man $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n}|\tilde{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \min(1, \|x\|^{-1})|x|$,
dann gilt für $t \in (0, \frac{1}{n^2})$:

(1.2.3) $\quad |t\tilde{y}| \leq \frac{1}{2}|x|$,

(1.2.4) $\quad t|\tilde{y}|^2 \leq (\frac{1}{n}|\tilde{y}|)^2 \leq \frac{1}{n}|\tilde{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2\|x\|}|x|$

und damit:

$$\frac{1}{t}\|\Theta(x+ty) - \Theta(x) - tSg_x(y)\|$$

$$\leq \frac{1}{t}(\|\,|x+t\tilde{y}| - |x| - Sg_x(t\tilde{y})\| + \|\,|x+ty| - |x+t\tilde{y}|\,\| + t\|Sg_x(y-\tilde{y})\|)$$

$$\leq \frac{1}{t}\|t^2|\tilde{y}|^2\| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.2.2\ ,\ 1.2.3)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\,\|\,|x|\,\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (1.2.4)\ .$$

□

1.3 Korollar: Es sei E ein Banachverband, $x \in E$ und $\overline{E}_{|x|}$ das von $|x|$ erzeugte abgeschlossene Ideal. Dann ist Sg_x: $\overline{E}_{|x|} \longrightarrow \overline{E}_{|x|}$ definiert, die Betragsabbildung Θ partiell nach $\overline{E}_{|x|}$ differenzierbar und $D\Theta\big|_x(y) = Sg_x(y)$ für alle $y \in \overline{E}_{|x|}$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Theorem.

Falls $|x|$ kein quasiinnerer Punkt von E ist, läßt

sich Sg_x definieren, wenn $\overline{E}_{|x|}$ ein Projektionsband ist, d.h. wenn eine positive Projektion $P:E \longrightarrow \overline{E}_{|x|}$ existiert.

Ist $Sg_x: \overline{E}_{|x|} \longrightarrow \overline{E}_{|x|}$ der Signumsoperator auf $\overline{E}_{|x|}$, dann sei nämlich:

$$S\hat{g}_x : E \longrightarrow E$$

$$y \longmapsto S\hat{g}_x(Py) + (id - P)|y| .$$

Diese Definition bedarf der Rechtfertigung, denn

(a) $S\hat{g}_x$ ist kein linearer Operator und

(b) im Falle $E = \mathbb{R}$ wird i.a. $\operatorname{sgn}(\alpha) := \begin{cases} +1 & \alpha > 0 \\ -1 & \alpha < 0 \\ 0 & \alpha = 0 \end{cases}$

definiert, man würde also vielleicht $S\hat{g}_0 = 0$ erwarten. Stattdessen ist $S\hat{g}_0(\alpha) = (\operatorname{sgn}\alpha)\alpha = |\alpha|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Die $S\hat{g}_x$ zufallende Aufgabe in diesem Kapitel wird aber vor allem die sein, als "Ableitung" von $\Theta: x \longmapsto |x|$ zu fungieren. Da in den Anwendungen (§(2-4)) nur rechtsseitig differenziert wird, ist es bequem $S\hat{g}_0$, als das "rechtsseitige Differential" von Θ in Null zu definieren. (Für $E = \mathbb{R}$ bedeutet dies: $S\hat{g}_t(1) = \begin{cases} \operatorname{sgn} t & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$).

1.4 Korollar: Es sei E ein Banachverband, $x \in E$ und $\overline{E}_{|x|}$ ein Projektionsband. Dann ist Θ Gâteauxdifferenzierbar in x und $D\Theta|_x = S\hat{g}_x$. Insbesondere ist Θ in Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm in allen $x \in E$ Gâteauxdifferenzierbar.

Beweis: Ist Q:= id-P die Projektion auf das zu $E_{|x|}$ orthogonale Band, so ist

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \| Q(\Theta(x+ty)) - Q(\Theta(x)) - tQ|y| \| = 0 .$$

Die zweite Behauptung folgt aus der Tatsache, daß in Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm jedes abgeschlossene Ideal schon Projektionsband ist.

□

1.5 Bemerkungen:

(i) Ist $E = C_c(K)$, so ist Θ in jedem nirgends verschwindenden $x \in C_c(K)$ sogar Fréchetdifferenzierbar (vgl. 1.1(iii)), wie aus dem ersten Teil des Beweises von 1.2 ersichtlich ist (vgl. 1.2.2).

(ii) Im allgemeinen ist Θ nicht Fréchetdifferenzierbar. Sei z.B. $E = L^1[0,1]$, sei $y_k := -2\chi_{[0,\frac{1}{k}]}$, $k \in \mathbb{N}$, und sei $\mathbb{1}$ die Einsfunktion. Da die partielle Ableitung $D\Phi|_x(y)$ eindeutig bestimmt ist, müßte, wenn Θ Fréchetdifferenzierbar wäre, schon

$\Theta'|_x(y) = D\Theta|_x(y)$ sein. Es ist

$$\frac{1}{\|y_k\|}\|\Theta(1+ y_k)- \Theta(1)- D\Theta|_x(y_k)\| = 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

aber $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$.

Problem: Es sei E ein Banachverband mit quasiinnerem Punkt. Muß E ein AM-Raum sein, wenn Θ in jedem quasiinneren Punkt von E Fréchetdifferenzierbar ist ?

Für reelle Banachverbände (und E sei für den Rest dieses Kapitels stets ein solcher) soll die Aussage von 1.2 jetzt verschärft werden. Nach 1.3 ist Θ in $x \in E$ stets nach $\overline{E}_{|x|}$ differenzierbar. Bei genauer Betrachtung stellt sich aber heraus, daß es noch "mehr Richtungen" gibt, in die Θ immer partiell ableitbar ist.

Im Anschluß an 1.7 und 1.8 erfolgt die Definition eines für diese Situation geeigneten Signumsoperators.

1.6 Lemma: Es seien $x,z \in E$ und $x > 0$. Wenn $z \in \overline{E}_x$ ist, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (|nx+ z|- nx) = z.$$

Beweis: z.z.: $|\,|nx+ z|-nx- z| \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$.

Es ist:

$$|\,|nx+ z|- nx- z|$$

$$= \big|\,|z^+ + |nx- z^-| - 2(nx- z^-)^-| - (|nx- z^-| - 2(nx- z^-)^- + z^+)\big|$$

$$\leq \big|\,|z^+ + |nx-z^-| - 2(nx-z^-)^-| - |\,|nx-z^-| + z^+|\,\big| + 2(nx-z^-)^-$$

$$\leq 4(nx- z^-)^-.$$

Da nach Voraussetzung $z^- \in \overline{E}_x$ ist, konvergiert $\|(nz- z^-)^-\|$ gegen 0. □

1.7 Satz: Es sei E ein reeller Banachverband, seien $x,y \in E$ und sei $|x|$ schwache Ordnungseinheit. Sei ferner:

$$y^+ = y_1^+ + y_2^+ \quad , \quad y_1^+ \in \overline{E}_{x^-} \quad , \quad y_2^+ \in (x^+)^{\perp\perp},$$

$$y^- = y_1^- + y_2^- \quad , \quad y_1^- \in \overline{E}_{x^+} \quad , \quad y_2^- \in (x^-)^{\perp\perp}.$$

Dann ist die Betragsabbildung $\ominus$ partiell nach y in x differenzierbar, und

$$D\ominus|_x(y) = y_2^+ + y_2^- - y_1^+ - y_1^-.$$

Beweis: Da y_1^-, y_2^-, y_1^+, y_2^+ paarweise zueinander orthogonal sind, ist $\frac{1}{t}\|\,|x+ ty| - |x| - t(y_2^+ + y_2^- - y_1^+ - y_1^-)\|$

$$\leq \| |\tfrac{1}{t}x^+ + y_2^+ - y_1^-| - \tfrac{1}{t}x^+ - (y_2^+ - y_1^-) \| + \| |-\tfrac{1}{t}x^- + y_1^+ - y_2^-| - \tfrac{1}{t}x^- - (y_2^- - y_1^+) \| .$$

Setzt man $z = y_2^+ - y_1^-$ (bzw. $z = y_2^- - y_1^+$) und wendet 1.5 auf den ersten (bzw. zweiten) Ausdruck an, folgt die Behauptung. □

1.8 Korollar: Es seien $x, y \in E$, $\overline{E}_{|x|}$ sei ein Projektionsband und $|x|^\perp$ das zu $|x|$ orthogonale Band. Sei ferner:

$$y^+ = y_1^+ + y_2^+ + y_3^+ \quad , \quad y_1^+ \in \overline{E}_{x^-} \quad , \quad y_2^+ \in (x^+)^{\perp\perp} \quad , \quad y_3^+ \in |x|^\perp ,$$

$$y^- = y_1^- + y_2^- + y_3^- \quad , \quad y_1^- \in \overline{E}_{x^+} \quad , \quad y_2^- \in (x^-)^{\perp\perp} \quad , \quad y_3^- \in |x|^\perp .$$

Dann ist Θ partiell nach y in x differenzierbar, und

$$D\Theta|_x(y) = y_2^+ + y_2^- - y_1^- - y_1^+ + y_3^+ + y_3^- .$$

Der Beweis von 1.8 erfolgt mit Hilfe von 1.7, ähnlich wie 1.4 unter Anwendung von 1.2 gezeigt wurde (und sei dem Leser überlassen).

Auf ordnungsvollständigen Banachverbänden läßt sich $S\hat{g}_x$ für alle $x \in E$ in einer Weise erklären, die die vorher gegebenen Definitionen des Signums-

operators umfaßt.

Dazu seien $P_+ : E \longrightarrow (x^+)^{\perp\perp}$, $P_- : E \longrightarrow (x^-)^{\perp\perp}$ die positiven Projektionen auf die von x^+ , x^- erzeugten Bänder $(x^+)^{\perp\perp}$, $(x^-)^{\perp\perp}$ und sei $P_\perp := id-(P_+ + P_-)$.
Setze:

$$S\hat{g}_x : E \longrightarrow E \quad , \; y \longmapsto P_+y - P_-y + P_\perp y.$$

Mit dieser Definition gilt unter den Voraussetzungen von 1.8

$$D\Theta|_x(y) = S\hat{g}_x(y)$$

für alle $x,y \in E$, wenn E ordnungsvollständig ist.

§2 Verbandshalbgruppen auf Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm

Die Paragraphen 2,3 und 4, alle drei mit "ähnlichen" Titeln, haben das Problem der Charakterisierung der Verbandshalbgruppen durch ihre Erzeuger zum Inhalt. Die Hauptergebnisse sind dabei 2.4, 3.4, 3.7 und 4.5.

Das Ziel des vorliegenden Abschnittes ist der Satz 2.4.

Der dort durchgeführte Beweis spiegelt vielleicht am besten (ohne allen technischen Ballast) die in der Kapiteleinleitung geschilderte Beweisidee wieder. In 3.4 und 3.7 werden dann allgemeinere Resultate (unabhängig von 2.4) auf reellen Banachverbänden vorgeführt. Die Äquivalenz in 4.5 unterscheidet sich ein wenig von den vorhergehenden, ist dafür aber (im Gegensatz zu 2.4 und 3.4) für alle komplexen Banachverbände gültig.

Wir beginnen mit einer Kettenregel:

2.1 Lemma: F sei ein (reeller oder komplexer) Banachraum, $g: [0,1] \longrightarrow F$, $f: F \longrightarrow F$ seien Abbildungen, g sei rechtsseitig differenzierbar in Null, f in g(0) partiell differenzierbar nach g'(0) und Lipschitzstetig (d.h. es gibt ein $L > 0$ mit $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x,y \in E$). Dann ist:

$$(f \circ g)'(0) = Df\big|_{g(0)}(g'(0)) \ .$$

Beweis: Sei $g(t) = g(0) + tg'(0) + o_g(t)$ und

$f(g(0)+tg'(0)) = f(g(0)) + Df\big|_{g(0)}(g'(0)) + o_f(t)$ mit

$\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\|o_g(t)\| = \lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\|o_f(t)\| = 0$.

Die Behauptung folgt aus:

$$\tfrac{1}{t}\|f(g(t)) - f(g(0)) - Df\big|_{g(0)}(g'(0))\| =$$

$$= \frac{1}{t}\|f(g(0)+ tg'(0)+ o_g(t))- f(g(0)+ tg'(0))$$
$$-f(g(0))+ f(g(0)+ tg'(0))- Df|_{g(0)}(g'(0))\|$$

$$\leqslant \frac{L}{t}\|o_g(t)\| + \frac{1}{t}\|o_f(t)\| . \qquad \square$$

In den folgenden Anwendungen wird f stets die Betragsabbildung Θ: $x \longmapsto |x|$ sein, die natürlich wegen $||x| - |y|| \leq |x-y|$ Lipschitzstetig ist.

2.2 Definition: Einen in einem (reellen oder komplexen) Banachverband E dichtdefinierten, abgeschlossenen linearen Operator $(B, \mathcal{D}(B))$ nennen wir lokal, wenn für alle $x \in \mathcal{D}(B)$, $y \in E$, für die $|x| \wedge |y| = 0$ gilt, $|Ax| \wedge |y| = 0$ ist.

Für lokale Operatoren ist demnach $Bx \in x^{\perp\perp}$ für alle $x \in \mathcal{D}(B)$. Typische Beispiele sind Differentialoperatoren auf Funktionenräumen über Gebieten im $\mathbb{R}^n$ und Multiplikatoren auf C(K) (vgl. R.Derndinger- R.Nagel [1979]).

2.3 Satz: Die Erzeuger von Verbandshalbgruppen auf Banachverbänden sind lokal.

Beweis: Es sei $(A, \mathcal{D}(A))$ der Erzeuger einer Verbandshalbgruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Es sei $x \in \mathcal{D}(A)$, $y \in E$, und es gelte $|x| \wedge |y| = 0$. Aus der Dreiecksungleichung und elementaren Abschätzungen (Schaefer [1974], II.1.6) erhält man:

$$|\tfrac{1}{t}(T(t)x-x)|\wedge|y| \leqslant |\tfrac{1}{t}T(t)x|\wedge|y| + x|\wedge|y|$$

$$\leqslant \tfrac{1}{t}T(t)|x|\wedge|T(t)y-y| + (T(t)\tfrac{1}{t}\int_0^t T(s)\,ds)|\wedge T(t)|y|$$

$$\leqslant |T(t)y-y|.$$

Da die Verbandsoperationen stetig sind, ist somit $|Ax|\wedge|y| = 0$. □

In der bereits zu Beginn dieses Kapitels zitierten Arbeit von M. Wolff [1978] wurde außer 2.3 und den schon erwähnten Ergebnissen gezeigt, daß die Definitionsbereiche von Erzeugern von Verbandshalbgruppen auf Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm stets Vektorunterverbände sind. R. Nagel hat dann nachgewiesen, daß die Umkehrung in Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm ebenfalls gilt. Er erreichte dies, indem er die Ableitung der Abbildung $\varphi: t \longmapsto T(s-t)|T(t)x|$, $x \in \mathcal{D}(A)$, $s \in \mathbb{R}_+$, für positive Halbgruppen mit lokalen Erzeugern berechnete und zeigte, daß $\varphi' \equiv 0$ gilt, falls $\mathcal{D}(A)$ ein Verband und A lokal ist.

Diese beiden Resultate lassen sich auf die in der Kapiteleinleitung geschilderten Weise deuten und sollen jetzt entsprechend bewiesen werden. Es stellt sich nebenbei heraus, daß Positivitätsforderungen an die Halbgruppe überflüssig sind.

2.4 Satz (M. Wolff - R. Nagel): Sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und sei $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine starkstetige Halbgruppe auf E mit Erzeuger $(A, \mathcal{D}(A))$. Äquivalent sind:

(i) $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Verbandshalbgruppe.

(ii) A lokal, $\mathcal{D}(A)$ Vektorunterverband.

Beweis: Wir beginnen mit ein paar Vorbemerkungen.

Sei $x\in\mathcal{D}(A)$ und sei $\eta_x\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$, $t \longmapsto T(t)x$. Da A lokal ist, ist $Ax\in x^{\perp\perp}$ (vgl. 2.2). $x^{\perp\perp}$ ist aber gleich dem von x erzeugten abgeschlossenen Ideal $\overline{E}_{|x|}$, denn E hat nach Voraussetzung ordnungsstetiger Norm. Nach 1.3 ist Θ dann in x partiell differenzierbar nach Ax,und folglich gilt (2.1):

$$(\Theta\circ\eta_x)'(0) = Sg_x(Ax)\,. \tag{2.4.1}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Wenn die T(t), $t\in\mathbb{R}_+$,Verbandshomomorphismen sind, ist $(\Theta\circ\eta_x)'(0)= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T(t)|x|-|x|)$, d.h. $|x|\in\mathcal{D}(A)$. Dies zusammen mit 2.3 liefert "(ii)".

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $x, |x|\in\mathcal{D}(A)$, x reell und seien $P_+\colon E \longrightarrow (x^+)^{\perp\perp}$, $P_-\colon E \longrightarrow (x^-)^{\perp\perp}$ die positiven Projektionen auf die von x^+ und x^- erzeugten Bänder.

Da A lokal ist, gilt $P_+Ax^+ = Ax^+$, $P_-Ax^- = Ax^-$ und

$P_+(Ax-Ax^+)= 0 = P_-(Ax+Ax^-)$. Daraus schließt man:

$$A|x| = Ax^+ + Ax^- = P_+Ax - P_-Ax = Sg_x Ax. \tag{2.4.2}$$

Sei nun $y \in \mathcal{D}(A)$, y reell und $s > 0$. Setzt man:

$$\varphi : [0,s] \longrightarrow E \quad , \quad t \longmapsto T(s-t)|T(t)y|,$$

so ist $\varphi(0) = T(s)|y|$ und $\varphi(s) = |T(s)y|$.

Ähnlich wie im Beweis von I.2.3 (iv)$\Rightarrow$(ii) oder bei R. Derndinger - R. Nagel [1979] werden wir sehen, daß die Ableitung von φ identisch verschwindet, und folgern dann unter Anwendung des Mittelwertsatzes die Aussage (i):

$$\varphi'(t) = -AT(s-t)|T(t)y| + T(s-t)(\odot \circ \eta_{T(t)y})'(0)$$

$$= -AT(s-t)|T(t)y| + T(s-t)Sg_{T(t)y}AT(t)y \tag{2.4.1}$$

$$= 0 \tag{2.4.2}.$$

□

Beispiel: Sei $E = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Die durch $T_i(t): E \longrightarrow E$, $T_i(t)x(p_1,\ldots p_i,\ldots,p_n) := x(p_1,\ldots,p_i + t,\ldots,p_n)$ erklärten Operatoren bilden für festes $i \in \{1,\ldots,n\}$ eine Verbandshalbgruppe. Ihr Erzeuger ist die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial p_i}$ in Richtung der i-ten Koor-

dinate mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial p_i}) = \{x \in E \mid \frac{\partial x}{\partial p_i} \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$, wobei die Ableitung im distributionellen Sinn verstanden sei. Da die L^p-Räume, $1 \leq p < \infty$, Banachverbände mit ordnungsstetiger Norm sind, sind die $\mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial p_i})$, $i=1,\ldots,n$, Vektorunterverbände. Dann muß aber auch der erste Sobolevraum $W^{1,p} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial p_i})$ ein Vektorunterverband sein. (Tatsächlich hat $W^{1,p}$ noch stärkere Eigenschaften, siehe M. Jean [1976].)

§3 Verbandshalbgruppen in reellen Banachverbänden

Das Ziel dieses Paragraphen ist die Verallgemeinerung der Äquivalenz in 2.4 auf eine Klasse von reellen Banachverbänden, die alle ordnungsvollständigen Banachverbände enthält. Die Beweismethode von 2.4 wird auch hier erfolgreich sein, nur muß die Analyse in Details sorgfältiger durchgeführt werden. Der zweite Teil von §1 wird jetzt zur Anwendung kommen.

E sei in §3 stets ein reeller Banachverband. Für $x \in E$ bezeichne, wie schon vorher $x^{\perp\perp}$, das von x erzeugte Band und $\overline{E}_{|x|}$ das von x erzeugte abgeschlossene Ideal. In Banachverbänden ohne ordnungsstetige Norm ist im allgemeinen $E_{|x|} \neq x^{\perp\perp}$ und damit $\Theta: x \longmapsto |x|$ selbst dann, wenn A lokal ist, nicht unbedingt in x partiell nach Ax differenzierbar.

Es gilt aber für einen Erzeuger A einer beliebigen starkstetigen Halbgruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ auf E noch das Folgende:

3.1 Satz: Es sei $x \in \mathcal{D}(A)$, $(Ax)^+ \in (x^+)^{\perp\perp} \oplus E_{x^-} \oplus x^\perp$ und $(Ax)^- \in (x^-)^{\perp\perp} \oplus E_{x^+} \oplus x^\perp$. Dann ist

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (|T(t)x| - |x|) = S\hat{g}_x Ax .$$

$S\hat{g}_x Ax$ steht abkürzend für die Terme $y_i^\pm$ in 1.8 (vgl. dazu auch die sich 1.8 anschließenden Ausführungen für ordnungsvollständige Banachverbände).

Beweis: Setzt man $\eta: \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$, $x \longmapsto T(t)x$, so ist η in x partiell differenzierbar nach $\eta'(0) = Ax$ (vgl.1.7). Aus der Kettenregel (2.1) folgt:

$$(\Theta \circ \eta)'(0) = D\Theta|_x Ax = S\hat{g}_x Ax.$$

□

In 3.4 werden wir sehen, daß für Verbandshalbgruppen auf ordnungsvollständigen Banachverbänden $(Ax)^+$ stets aus $(x^+)^{\perp\perp} \oplus E_{x^-}$ ist.

Der Beweis des Korollars 3.2 ergibt sich aus 3.1, wenn man berücksichtigt, daß in Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm $(x^+)^{\perp\perp} = E_{x^+}$ ist.

3.2 Korollar: Ist E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, dann gilt für alle $x \in \mathcal{D}(A)$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (|T(t)x| - |x|) = S\hat{g}_x Ax \ .$$

Das nächste Lemma beinhaltet einige für unsere Zwecke nützliche Rechengesetze.

3.3 Lemma: Es sei E ein (reeller) Banachverband. Für $x,y,z \in E_+$ gilt:

(i) $(x+y) \wedge z = y \wedge z$, falls $x \wedge z = 0$.

(ii) $(z-y-x)^+ = (z-y)^+$, falls $x \wedge z = 0$.

(iii) $(w-x)^+ \wedge z = w^+ \wedge z$ für alle $w \in E$, falls $x \wedge z = 0$.

(iv) Aus $\lim_{n \to \infty} ((y-nx)^+ \wedge z) = 0$ folgt $y \wedge z \in \overline{E}_x$.

Beweis: (i) ist klar.

(ii): $(z-y-x) \vee 0 = z-(z \wedge (y+x)) = z-z \wedge y = (z-y)^+$.

(iii): $(w-x)^+ \wedge z \leqslant w^+ \wedge z = (w-x+x)^+ \wedge z \leqslant (w-x)^+ \wedge z$.

(iv): $(y \wedge z-nx)^+ = ((y-nx) \wedge (z-nx))^+$

$$\leqslant ((y-nx) \wedge z)^+ = (y-nx)^+ \wedge z \ .$$

Also ist $\lim_{n \to \infty} (y \wedge z-nx)^+ = 0$ und damit $y \wedge z \in \overline{E}_x$. □

Bemerkung: Die Umkehrung von (iv) ist ebenfalls richtig.

3.4 Theorem: Es sei E ein ordnungsvollständiger, reeller Banachverband und $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Verbandshalbgruppe mit Erzeuger $(A, \mathcal{D}(A))$. Dann ist $\mathcal{D}(A)$ ein Vektorunterverband und $A|x| = S\hat{g}_x Ax$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$.

Beweis: Aus der Lokalität von A (vgl. 2.3) und der Ordnungsvollständigkeit von E folgt $Ax \in (x^+)^{\perp\perp} \oplus (x^-)^{\perp\perp}$ für $x \in \mathcal{D}(A)$. Um 3.1 anzuwenden, genügt es, zu zeigen, daß für $x \in \mathcal{D}(A)$

$$(Ax)^+ \wedge z \in \overline{E}_{x^-} \quad \text{für alle } z \in (x^-)^{\perp\perp},\ z > 0,$$

gilt oder aufgrund von 3.3 (iv)

$$\lim_{t \to 0} ((Ax)^+ - \tfrac{1}{t}x^-)^+ \wedge z = 0 \quad \text{für alle } z \in (x^-)^{\perp\perp},\ z > 0,$$

erfüllt ist. Wegen

$$((Ax)^+ - \tfrac{1}{t}x^-)^+ \wedge z = (Ax - \tfrac{1}{t}x^-)^+ \wedge z \qquad (3.3(ii))$$

$$= (Ax - \tfrac{1}{t}(T(t)x - x) + \tfrac{1}{t}T(t)x)^+ \wedge z \qquad (3.3(iii))$$

und der Stetigkeit der Verbandsoperationen bleibt also nur noch der Nachweis von

$$\lim_{t \to 0} (\tfrac{1}{t}T(t)x)^+ \wedge z = 0 \text{ für alle } z \in (x^-)^{\perp\perp},\ z > 0,$$

zu erbringen. Dies folgt unmittelbar aus:

$$(\tfrac{1}{t}T(t)x)^+ \wedge z \leq (\tfrac{1}{t}T(t)x^+) \wedge |z-T(t)z| + (\tfrac{1}{t}T(t)x^+) \wedge T(t)z$$

$$\leq |z- T(t)z| \quad . \qquad \square$$

Bemerkung: Der Beweis von 3.4 zeigt, daß die Voraussetzung "ordnungsvollständiger Banachverband" durch die schwächere "E Banachverband mit PPP" (vgl. H.H. Schaefer [1974], Seite 63) ersetzt werden kann.

Beispiel: Es sei $E := l^\infty(\mathbb{N}) \times L^1(\mathbb{R},\mu)$, μ Haarmaß auf $\mathbb{R}$. Bezeichnen $\| \ \|_\infty$ bzw. $\| \ \|_1$ die üblichen Normen auf $l^\infty(\mathbb{N})$ bzw. $L^1(\mathbb{R},\mu)$, dann ist E mit der Norm $\|(z,x)\| := \|z\|_\infty + \|x\|_1$ ein ordnungsvollständiger Banachverband, der keine ordnungsstetige Norm trägt. Setzt man

$S(t): L^1(\mathbb{R},\mu) \longrightarrow L^1(\mathbb{R},\mu)$, $S(t)x(p) := x(p+t)$, $p \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$,

dann definiert $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$,

$$T(t): E \longrightarrow E \quad , \quad (z,x) \longmapsto (z,S(t)x) \ ,$$

eine Verbandshalbgruppe, deren Erzeuger nach 3.4 als Definitionsbereich einen Vektorunterverband hat.

Als nächstes wollen wir an die "Umkehrung" von 3.4 gehen. Wir beginnen mit einem Lemma:

3.5 Lemma: Es sei E ein Banachverband. $F_1: \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$, $F_2: \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ seien stetige Abbildungen, die in Null rechtsseitig differenzierbar sind. Wenn

$|F_1(0)| \wedge |F_2(0)| = |F_1'(0)| \wedge |F_2'(0)| = 0$ und

$|F_1'(0)| \wedge |F_2(0)| = |F_1(0)| \wedge |F_2'(0)| = 0$ erfüllt sind, gilt:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(|F_1(t)| \wedge |F_2(t)|) = 0 \quad .$$

Beweis: z.z.: Zu jeder gegen Null konvergenten Folge positiver reeller Zahlen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es eine Teilfolge $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim \frac{1}{t_{n_k}} (|F_1(t_{n_k})x| \wedge |F_2(t_{n_k})y|) = 0$.

Sei also $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$. Dann findet man eine Teilfolge $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ derart, daß

$$\max(\|\frac{1}{t_{n_k}} (F_1(t_{n_k}) - F_1(0)) - F_1'(0)\|, \|\frac{1}{t_{n_k}} (F_2(t_{n_k}) - F_2(0)) - F_2'(0)\|) < 2^{-k}$$

gilt. Setzt man der Einfachheit halber für $k \in \mathbb{N}$

$$x_k := \frac{1}{t_{n_k}} |F_1(t_{n_k}) - F_1(0)| \text{ und } y_k := \frac{1}{t_{n_k}} |F_2(t_{n_k}) - F_2(0)| \quad ,$$

so sind

$$\overline{x}_j := \sum_{k=j}^{\infty} |x_k - |F_1'(0)|| \quad \text{und} \quad \overline{y}_j := \sum_{k=j}^{\infty} |y_k - |F_2'(0)||$$

wohldefiniert, und es folgt:

$$x_k \leq |x_k - |F_1'(0)|| + |F_1'(0)| \leq \bar{x}_j + |F_1'(0)| \quad \text{und}$$

(3.5.1)

$$y_k \leq \bar{y}_j + |F_2'(0)| \qquad \text{für } j \leq k \ .$$

Wegen 3.3 (ii), der Stetigkeit der Verbandsoperationen und $|F_1'(0)| \wedge |F_2'(0)| = |F_1'(0)| \wedge |F_2(0)| = 0$ ist

$$\lim_{k\to\infty} |F_1'(0)| \wedge |\frac{1}{t_{n_k}} F_2(t_{n_k})| = 0 \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit

(3.5.2) $$\max(\|\bar{x}_k\|, \|\bar{y}_k\|, \| |F_1'(0)| \wedge |\frac{1}{t_{n_k}} F_2(t_{n_k})| \|) < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $k \geq j$.

Für solche k berechnet man unter Verwendung der Voraussetzung , von (3.5.1) und (3.5.2):

$$\begin{aligned}
&\| \tfrac{1}{t_{n_k}} (|F_1(t_{n_k})| \wedge |F_2(t_{n_k})|) \| \\
&\leq \| (\tfrac{1}{t_{n_k}} |F_1(t_{n_k}) - F_1(0)| + \tfrac{1}{t_{n_k}} |F_1(0)|) \wedge \tfrac{1}{t_{n_k}} |F_2(t_{n_k})| \| \\
&\leq \| x_k \wedge |\tfrac{1}{t_{n_k}} F_2(t_n)| \| + \| |\tfrac{1}{t_{n_k}} F_1(0)| \wedge (\tfrac{1}{t_{n_k}} \|F_2(t_{n_k}) - F_2(0)| + \tfrac{1}{t_{n_k}} |F_2(0)|) \| \\
&\leq \| \bar{x}_j \wedge |\tfrac{1}{t_{n_k}} F_2(t_{n_k})| + |F_1'(0)| \wedge |\tfrac{1}{t_{n_k}} F_2(t_n)| \| + \| |\tfrac{1}{t_{n_k}} F_1(0)| \wedge y_k \| \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \| |\tfrac{1}{t_{n_k}} F_2(0)| \wedge \bar{y}_j \| + \| |\tfrac{1}{t_{n_k}} F_1(0)| \wedge |F_2'(0)| \| \qquad (3.5.1,2) \\
&\leq \varepsilon \qquad (3.5.2) \ .
\end{aligned}$$

□

3.6 Satz: Es sei E ein reeller Banachverband, $(A,\mathcal{D}(A))$ lokaler Erzeuger einer starkstetigen Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, für die $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t\in\mathbb{R}_+$, gilt, und es seien $R(\lambda) := (\lambda-A)^{-1}$ für $\lambda>\omega$ die Resolventen. Sind $x, |x| \in \mathcal{D}(A)$, so ist

$$A|x| = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(|T(t)x|-|x|) = \lim_{\lambda\to\infty} (|\lambda R(\lambda)x|-|x|) .$$

Beweis: Aus $(T(t)x)^{\mp} = T(t)(x^{\mp}) - T(t)x^{+} \wedge T(t)x^{-}$ folgt

$$|T(t)x|-|x| = T(t)|x|-|x|-2(T(t)x^{+}\wedge T(t)x^{-})$$

für alle $t\in\mathbb{R}_+$. Zeigt man $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T(t)x^{+}\wedge T(t)x^{-}) = 0$, so ist demnach die erste Gleichheit im Satz bewiesen. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 3.5, wenn man $F_1(t) := T(t)x^{+}$, $F_2(t) := T(t)x^{-}$ setzt und berücksichtigt, daß $|T(t)x^{+}\wedge T(t)x^{-}| \leq |T(t)x^{+}|\wedge|T(t)x^{-}|$ ist.

Ganz analog überzeugt man sich unter Zuhilfenahme der Tatsache $Ay = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)y - y)$ für alle $y\in\mathcal{D}(A)$ von $A|y| = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(|\lambda R(\lambda)y|-|y|)$. Dazu definiere $F_1(t) := \frac{1}{t}R(\frac{1}{t})y^{+}$, $F_2(t) := \frac{1}{t}R(\frac{1}{t})y^{-}$ und wende 3.5 an. □

Ähnlich wie in 2.4 (ii) $\Longrightarrow$ (i) läßt sich jetzt die angekündigte "Umkehrung" aus 3.6 herleiten.

3.7 Theorem: E sei ein Banachverband, $(A, \mathcal{D}(A))$ der lokale Erzeuger einer starkstetigen Halbgruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ und $\mathcal{D}(A)$ ein Vektorunterverband. Dann ist $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Verbandshalbgruppe.

Beweis: Sei $s > 0$ und $y \in \mathcal{D}(A)$. Setzt man $\varphi: [0,s] \longrightarrow E$, $t \longmapsto T(s-t)|T(t)y|$, so ist $\varphi(0) = T(s)|y|$ und $\varphi(s) = |T(s)y|$. Für die Ableitung φ' von φ berechnet man unter Anwendung von 3.6 und Ausnutzung der Halbgruppeneigenschaft:

$$\varphi'(t) := -T(s-t)A|T(t)y| + T(s-t)\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(|T(h+t)y| - |T(t)y|)$$

$$= 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt $T(s)|y| = |T(s)y|$ und, da $s > 0$, $y \in \mathcal{D}(A)$ beliebig waren, die Behauptung.

3.8 Korollar: In einem reellen Banachverband mit PPP sind äquivalent:

(i) $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ ist eine Verbandshalbgruppe.

(ii) A lokal, $\mathcal{D}(A)$ Vektorunterverband.

Beweis: 3.7, 2.3 und die Bemerkung im Anschluß an 3.4 erbringen den Nachweis.

Bemerkung: 3.8 bleibt für komplexe Banachverbände, die ja durch Komplexifizierung aus reellen hervorgehen, richtig, wenn man zusätzlich noch verlangt, daß die Halbgruppe (bzw. der Erzeuger) den zugrundeliegenden reellen Anteil des Raumes in sich abbildet.

§4 Verbandshalbgruppen auf komplexen Banachverbänden

Im vorangehenden Paragraphen wurde für eine große Klasse von Banachverbänden die Äquivalenz der beiden Aussagen

(i) $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ Verbandshalbgruppe ,

(ii) A lokal, $\mathcal{D}(A)$ Vektorunterverband

nachgewiesen. In C(K)-Räumen jedoch gilt (i.a.) eine solche Charakterisierung nicht, wie wir bereits zu Beginn dieses Kapitels feststellten. Dieser "Schönheitsfehler" soll nun für Halbgruppen positiver Operatoren in komplexen Banachverbänden durch Abänderung der zweiten Bedingung beseitigt werden.

Dazu einige Bemerkungen. Insbesondere für lokale Erzeuger auf reellen Banachverbänden ist $A|x|=S\hat{g}_x Ax$, falls $x, |x| \in \mathcal{D}(A)$ sind und $S\hat{g}_x$ erklärt ist (vgl. 3.1, 3.2

oder Argumentation zu 2.4.2). Selbst für lokale Erzeuger wird dies im Komplexen i.a. falsch (4.6), bleibt für Erzeuger von Verbandshalbgruppen aber noch richtig, wie 4.5 zeigen wird. Es stellt sich sogar heraus, daß die Verbandshalbgruppen unter den positiven Halbgruppen gerade durch diese Gleichheit ausgezeichnet sind (4.5) - vorausgesetzt es gibt "genügend viele" $x \in \mathcal{D}(A)$, für die auch $|x| \in \mathcal{D}(A)$ ist.

4.1 Lemma: $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ sei eine starkstetige Halbgruppe positiver Operatoren auf $C(K)$, $x \in C(K)$ und $x \gg 0$ (d.h. $x(p) > 0$ für alle $p \in K$). Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit $T(t)x \in \left[\alpha e^{-t\beta}x, \alpha e^{t\beta}x\right]$.

Beweis: Da $\lim_{t \to 0} T(t)x = x$ gilt, gibt es ein $s_o \in \mathbb{R}_+$ derart, daß $T(s)x \in \left[\frac{1}{2}x, \frac{3}{2}x\right]$ für alle $s \in [0, s_o]$ ist. Da für $y \in \left[\frac{1}{2}x, \frac{3}{2}x\right]$ wegen der Positivität der Operatoren $T(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $T(s)y \in \left[(\frac{1}{2})^2 x, (\frac{3}{2})^2 x\right]$ für alle $s \in [0, s_o]$ gelten muß, läßt sich $T(ns)x = T(s)^n x \in \left[2^{-n}x, (\frac{3}{2})^n x\right]$ mit Induktion und damit $T(t)x \in \left[\frac{1}{2}2^{-t}x, \frac{3}{2}(\frac{3}{2})^t x\right]$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ zeigen. □

Die folgende Charakterisierung der Verbandshalbgruppen auf $C(K)$ ist rein ordnungstheoretischer Natur, im Gegensatz zu R. Derndinger - R. Nagel [1979], 2.6 .

4.2 Satz: Sei $(A, \mathcal{D}(A))$ der Erzeuger einer starkstetigen Halbgruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ positiver Operatoren auf $C_{\mathbb{C}}(K)$. Äquivalent sind:

(i) $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ Verbandshalbgruppe .

(ii) Aus $x \in \mathcal{D}(A)$, $|x| \gg 0$ folgt $|x| \in \mathcal{D}(A)$ und $A|x| = Sg_x Ax$.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Analog zu 2.4 "(i) $\Longrightarrow$ (ii)".

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Da $\mathcal{D}(A)$ dicht in $C_{\mathbb{C}}(K)$ ist, gibt es ein $y \in \mathcal{D}(A)$, $y \gg 0$. Sei nun $x \in \mathcal{D}(A)$ beliebig, $\varepsilon > 0$ und $x_\varepsilon := x + i\varepsilon y$. Dann ist nach 4.1 und der Dreiecksungleichung

(4.2.1) $\quad |T(t)x_\varepsilon| \geq |T(t)y| \gg 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$,

und folglich $|T(t)x_\varepsilon| \in \mathcal{D}(A)$ nach Voraussetzung. Aus 4.2.1 zusammen mit 1.2 und 2.1 läßt sich ferner für $t \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(|T(h)T(t)x_\varepsilon| - |T(t)x_\varepsilon|) = Sg_{T(t)x_\varepsilon} AT(t)x_\varepsilon = A|T(t)x_\varepsilon|$$

schließen. Wendet man dies bei der Berechnung der Ableitung von $\varphi : t \longrightarrow T(s-t)|T(t)x_\varepsilon|$ an, so ergibt sich $\varphi' \equiv 0$ und damit $|T(t)x_\varepsilon| = T(t)|x_\varepsilon|$ ähnlich

wie in 2.4. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt und $\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon = x$ ist, folgt die Behauptung. □

Der Nachteil von 4.2 besteht darin, daß sich (ii) in beliebigen Banachverbänden so nicht formulieren läßt. Eine leichte Modifizierung wird dies dann aber doch möglich machen.

Für den Rest dieses Kapitels sei $(A, \mathcal{D}(A))$ der Erzeuger einer starkstetigen Halbgruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ positiver Operatoren auf einem komplexen Banachverband E, für die $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ gelte.

4.3 Definition: Ein abgeschlossenes Ideal I in E heiße A-Ideal, wenn für ein $\lambda > \omega$ aus $(\lambda - A)x \in I$ stets $x \in I$ folgt.

Bevor wir zur Kennzeichnung der Erzeuger von Verbandshalbgruppen kommen, soll der eben definierte Begriff anhand einiger Äquivalenzen erläutert werden.

4.4 Satz: Für ein abgeschlossenes Ideal I sind äquivalent:

(i) I A-Ideal.

(ii) $R(\lambda)I \subset I$ für alle $\lambda > \omega$.

(iii) $T(t)I \subset I$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus den wohlbekannten Beziehungen zwischen A, T(t) und R(λ). Sie sind deshalb dem Leser überlassen.

4.5 Theorem: Äquivalent sind:

(i) $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ Verbandshalbgruppe.

(ii) Wenn $\overline{E}_{|x|}$ ein A-Ideal für $x \in \mathcal{D}(A)$ ist, so gilt $|x| \in \mathcal{D}(A)$ und $A|x| = Sg_x Ax$.

Beweis: (i)$\Longrightarrow$(ii) Sei $\overline{E}_{|x|}$ ein A-Ideal. Nach 4.4 bilden die Operatoren $T(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, das Ideal $\overline{E}_{|x|}$ in sich ab, Ax muß also in $\overline{E}_{|x|}$ liegen. Aus 1.3 folgt

$$A|x| = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(|T(t)x| - |x|) = (\odot \circ \eta)'(0) = Sg_x Ax,$$

wenn η die Abbildung $t \longmapsto T(t)x$ und Sg_x der Signumsoperator auf $\overline{E}_{|x|}$ ist.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Sei $x \in E$ und $\lambda > \omega$. Setzt man $u := R(\lambda)|x| \in \mathcal{D}(A)$, so gilt aufgrund der Positivität von $T(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$:

$$(4.5.1) \quad T(t)u = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(t+s)|x|\,ds \leqslant e^{\lambda t} \int_t^\infty e^{-\lambda s} T(s)|x|\,ds \leqslant e^{\lambda t} u.$$

Wegen $T(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, folgt für eine positive Linear-

form $x' \in E'_+$ aus $0 = x'(u) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} x'(T(s)|x|)ds$ stets $x'(|x|) = 0$. Da $\overline{E}_u$ ein abgeschlossenes Ideal ist, muß also $x \in \overline{E}_u$ sein.

Sei nun $y \in \mathscr{D}(A) \cap [-u,u]$, $\varepsilon \in (0,1)$ und $y_\varepsilon := y + i\varepsilon u$. Dann ist nach (4.5.1)

$$T(s)|T(t)y_\varepsilon| \leqslant T(t)T(s)|y_\varepsilon| \leqslant 2e^{\lambda s}T(t)u \leqslant 2\varepsilon^{-1}e^{\lambda s}|T(t)y_\varepsilon|$$

für alle $s \in \mathbb{R}_+$, und demnach

$$T(s)\overline{E}_{|T(t)y_\varepsilon|} \subset \overline{E}_{|T(t)y_\varepsilon|} \quad \text{für alle } s,t \in \mathbb{R}_+.$$

Nach 4.4 bedeutet dies, daß $\overline{E}_{|T(t)y_\varepsilon|}$ ein A-Ideal ist.

Da $T(t)y_\varepsilon \in \mathscr{D}(A)$ ist, folgt nach Voraussetzung $|T(t)y_\varepsilon| \in \mathscr{D}(A)$ und

$$A|T(t)y_\varepsilon| = Sg_{T(t)y_\varepsilon} AT(t)y_\varepsilon \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.5.2}$$

$Sg_{T(t)y_\varepsilon}$ ist definiert, weil für jeden quasiinneren Punkt $z \in \mathscr{D}(A)$ eines A-Ideals I aufgrund von 4.4(iii) $Az \in I$ sein muß und für solche Elemente der Signumsoperator Sg_z in §1 erklärt wurde. Setzt man $\varphi_\varepsilon(t) := T(s-t)|T(t)y_\varepsilon|$ für $0 \leqslant t \leqslant s$, s beliebig aber fest, so zeigt man wie in 2.4 (diesmal unter Verwen-

dung von 4.5.2) $\varphi' \equiv 0$ und erhält $|T(s)y_\varepsilon| = T(s)|y_\varepsilon|$ für $s \in \mathbb{R}_+$. Da $\{\lambda y_\varepsilon \mid y \in \mathcal{D}(A) \cap [-u,u], \lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ eine dichte Teilmenge von $\bar{E}_u$ bildet, muß $|T(s)x| = T(s)|x|$ sogar für alle $x \in E$ gelten. Daraus folgt (i). □

Wir schließen das II. Kapitel mit einem wohlbekannten Beispiel.

4.6 Beispiel: $C_0(\mathbb{R})$ seien die stetigen, komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, deren Real- und Imaginärteile im Unendlichen verschwinden. $\mathcal{D}(\Delta)$ sei die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, deren zweite Ableitung in $C_0(\mathbb{R})$ liegt. Wie man weiß, ist der Operator $\Delta : \mathcal{D}(\Delta) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$, $x \longmapsto x''$, Erzeuger einer starkstetigen positiven Halbgruppe, und man überzeugt sich sofort, daß Δ lokal , $C_0(\mathbb{R})$ das einzige Δ-Ideal und, daß mit $x \in \mathcal{D}(\Delta)$, $|x|$ quasiinnerer Punkt auch $|x| \in \mathcal{D}(\Delta)$ ist (d.h. der erste Teil von 4.5 (ii) ist erfüllt). Trotzdem ist Δ kein Erzeuger einer Verbandshalbgruppe. Dies liegt daran, daß für komplexe Funktionen i.a. $\Delta|x| \neq Sg_x \Delta x$ ist. Ist nämlich z.B. $x \in \mathcal{D}(\Delta)$ eine Fortsetzung der Funktion $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $p \longmapsto \sin(p) + i\cos(p)$, dann gilt

$$\Delta|x|(p) = 0 \text{ , aber}$$

$$Sg_x \Delta x(p) = \mathrm{Re}((\sin(p)-i\cos(p))(-\sin(p)-i\cos(p))) = -1$$

für alle $p \in [0,1]$.

K A P I T E L III

Kompakte Verbandsgruppen und Verbandsgruppen mit kompakter Resolvente

Abgeschlossene, dichtdefinierte Operatoren mit kompakter Resolvente (wie z.B. der Laplaceoperator) sind von vielen Autoren untersucht worden und spielen eine bedeutende Rolle bei den Anwendungen in der mathematischen Physik. T. Kato schreibt dazu in seinem Buch über Störungstheorie: "It may be said that most differential operators that appear in classical boundary problems are of this type." [1966], Seite 187. Im Anschluß daran verweist er auf eine Reihe von Differentialoperatoren (erster und zweiter Ordnung) auf Funktionenräumen über einem Intervall K= [a,b]. Wie sich nun herausstellen wird, ist dabei für die Terme erster Ordnung die Eindimensionalität von K entscheidend. Ich werde nämlich zeigen, daß beschränkte Verbandsgruppen mit kompakter Resolvente, d.h. starkstetige, beschränkte Gruppen von Verbandsoperatoren, deren Erzeuger eine kompakte Resolvente haben, "im Wesentlichen" von dem in I.3.1 besprochenen Rotationsfluß auf dem Einheitskreis S^1 herrühren. Der Zusammenhang mit der Theorie der Differentialoperatoren wird deutlich, wenn man sich daran erinnert, daß die Morphismenhalbgruppen erzeugenden Derivationen

auf $C[0,1]$ sich in der Form $g\frac{\tilde{d}}{dp}$, $g \in C[0,1]$,schreiben lassen, wobei $\frac{\tilde{d}}{dp}$ den "Ableitungsoperator" bezüglich einer geeigneten Mannigfaltigkeitsstruktur auf $[0,1]$ bezeichnet (vgl. I.4).

In §1 werden Morphismengruppen mit kompakter Resolvente klassifiziert. Geometrische Überlegungen bildeten den Ausgangspunkt dieser Untersuchung. Ich habe deshalb versucht, meine "Anschauung" durch ausführliche Kommentare und Erläuterungen weiter zu geben. §1 richtet sich also vor allem an solche Leser, die Freude an einem intuitiv-geometrischen Verständis der Mathematik haben. Das Ergebnis selbst wird im zweiten Paragraphen auf beliebige Banachverbände verallgemeinert und mit anderen Methoden bewiesen. Der dritte Abschnitt behandelt die Frage, für welche lokaleuklidischen, kompakten Räume K es eine relativ kompakte, irreduzible Morphismengruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ auf $C(K)$ gibt. Es stellt sich heraus, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn K homöomorph zu einem der Tori T^n, $n \in \mathbb{N}$, ist.

§1 Morphismengruppen mit kompakter Resolvente

Wenn $(A,\mathcal{D}(A))$ der Erzeuger einer beschränkten (d.h. $\|T(t)\| \leq M$, $t \in \mathbb{R}_+$), starkstetigen Halbgruppe auf einem Banachraum E ist, dann existiert nach dem Satz von Hille - Yosida die Resolvente $R(\lambda) := (\lambda id - A)^{-1}$ für alle $\lambda > 0$, und man hat die Darstellung:

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\,ds \quad \text{für alle } x \in E.$$

Ist $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ sogar eine Morphismenhalbgruppe auf C(K), die von dem Halbfluß $\varphi: K \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow K$ induziert wird (I.2.3), so gilt in $p \in K$:

$$R(\lambda)x(p) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} x(\varphi(p,s))\,ds \quad \text{für alle } x \in C(K),$$

d.h. $x \in C(K)$ wird entlang der Trajektorien integriert und auf diese Weise "geglättet".

Nach I.4.3 heißen zwei Flüsse $\varphi_1: K_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow K_1$, $\varphi_2: K_2 \times \mathbb{R} \longrightarrow K_2$ isomorph, wenn es einen Homöomorphismus u von K_1 auf K_2 mit $\varphi_2(u(p),t) = u(\varphi_1(p,t))$ für alle $p \in K_1$, $t \in \mathbb{R}$ gibt.

Bei der Formulierung des folgenden Theorems werden die Bezeichnungen des in I.3.1 behandelten Beispiels (Rotationsfluß) verwendet.

1.1 Theorem: Es sei $\delta: \mathcal{D}(\delta) \longrightarrow C(K)$ der Erzeuger einer Morphismengruppe mit zugehörigem Fluß φ und sei $R(\lambda)$ kompakt für ein $\lambda > 0$.

Dann läßt sich K in eine endliche Anzahl von disjunkten, offenabgeschlossenen, φ-invarianten Mengen $K_1, \ldots, K_n$ zerlegen.

Besteht K_j nicht nur aus einem Punkt, so ist die Einschränkung φ_j von φ auf $K_j \times \mathbb{R}$ für eine geeignete reelle Zahl $\gamma > 0$ isomorph zu ψ_γ aus I.3.1.

Mit anderen Worten: K ist bis auf Homöomorphie eine Vereinigung von endlich vielen Kreisen und isolierten Punkten. φ operiert auf den Kreisen wie eine Rotation und läßt die isolierten Punkte invariant.

Beweis: Sei $\lambda > 0$ eine reelle Zahl, für die $R(\lambda)$ kompakt ist, und sei $U := \{ x \in C(K) \mid \|x\| \leq 1 \}$. Dann ist $R(\lambda)U$ relativkompakt nach Voraussetzung und somit separabel. Da $\mathcal{D}(\delta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nR(\lambda)U$ dicht in C(K) liegt, ist C(K) separabel und folglich K metrisierbar (vgl. H.H. Schaefer [1974], II.7.5).

Sei d eine Metrik auf K, die die Topologie von K induziert. Nach dem Satz von Arzelá- Ascoli ist $R(\lambda)U$ eine Menge gleichmäßig gleichgradig stetiger Funktionen auf K, d.h. es existiert ein $\beta > 0$ mit der Eigenschaft:

$$|R(\lambda)x(p) - R(\lambda)x(q)| \leq \frac{1}{4\lambda}$$

für alle $x \in U$ und $p,q \in K$ mit $d(p,q) < \beta$.

Ich werde jetzt zeigen, daß zwei Punkte in K, die einen Abstand kleiner als β haben, durch eine "kurze" Trajektorie miteinander verbindbar sind; insbesondere haben also disjunkte Bahnen einen Mindestabstand β. Das folgende Lemma beinhaltet die exakte Formulierung:

Lemma: Für $p,q \in K$, $d(p,q) < \beta$ existiert ein $t_o \in \left[-\frac{1}{\lambda}\log 8, \frac{1}{\lambda}\log 8\right]$ mit $p = \varphi(q,t_o)$.

Beweis: Angenommen, es existieren $p_1, p_2 \in K$, $d(p_1,p_2) < \beta$, aber $p_1 \neq \varphi(p_2,t)$ für alle $t \in \left[-\frac{1}{\lambda}\log 8, \frac{1}{\lambda}\log 8\right]$.
Setzt man

$$arc_1 := \left\{\varphi(p_1,t) \;\middle|\; 0 \leq t \leq \frac{1}{\lambda}\log 2\right\} \text{ und}$$

$$arc_2 := \left\{\varphi(p_2,t) \;\middle|\; 0 \leq t \leq \frac{1}{\lambda}\log 8\right\} \text{, so ist}$$

$$arc_1 \cap arc_2 = \phi .$$

Nach dem Satz von Uryson findet man also eine Funktion $x: K \longrightarrow [0,1]$, $x(arc_1) \subset \{1\}$ und $x(arc_2) \subset \{0\}$.
Für diese Funktion ergibt sich:

$$\frac{1}{4\lambda} \geq R(\lambda)x(p_1) - R(\lambda)x(p_2) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} x(\varphi(p_1,t))dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} x(\varphi(p_2,t))dt$$

$$\geq \int_0^{\lambda^{-1}\log 2} e^{-\lambda t} x(\varphi(p_1,t))dt - \int_{\lambda^{-1}\log 8}^\infty e^{-\lambda t} x(\varphi(p_2,t))dt$$

$$\geq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{8\lambda} = \frac{3}{8\lambda} .$$

Das ist natürlich ein Widerspruch,und das Lemma ist bewiesen.

Als nächstes wird gezeigt, daß jedes $p \in K$ periodisch oder stationär ist.

Sei $p \in K$ und sei $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die nach $+\infty$ konvergiert. $\{\varphi(p,t_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ hat einen Häufungspunkt q. Folglich existieren $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $t_{k_2} > t_{k_1} + \frac{2}{\lambda} \log 8$ und $d(q, \varphi(p,t_{k_i})) < \beta$.

Nach dem eben bewiesenen Lemma existieren

$s_1, s_2 \in \left[-\frac{1}{\lambda} \log 8, \frac{1}{\lambda} \log 8\right]$ mit

$q = \varphi(p, t_{k_1} + s_1) = \varphi(p, t_{k_2} + s_2)$.

Da nun $t_{k_2} + s_2 - t_{k_1} - s_1 \neq 0$ ist und $p = \varphi(p, t_{k_2} + s_2 - t_{k_1} - s_1)$ gilt, muß p ein periodischer oder stationärer Punkt sein.

Die Menge $O(p) = \{\varphi(p,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $p \in K$, ist demnach abgeschlossen.

$O(p)$ ist aber auch offen, denn im Lemma wurde gezeigt, daß jeder Punkt, der einen kleineren Abstand als β zu einem Punkt aus $O(p)$ hat, selber schon in $O(p)$ liegt. Da K kompakt ist, lassen sich Punkte $p_1, \ldots, p_n$ derart finden, daß $K = \bigcup_{i=1}^{n} O(p_i)$ und $O(p_i) \cap O(p_j) = \phi$ für $i \neq j$ gilt. Setze $K_j := O(p_j)$.

Die Isomorphismen werden nun folgendermaßen konstruiert.

1. Gilt $O(p_j) = \{p_j\}$, so bleibt nichts zu zeigen. $C(O(p_j))$ ist eindimensional, und $T(t)|_{C(O(p_j))} = id$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Ist $O(p_j) \neq \{p_j\}$, dann sei φ die Periode von p_j. Setze $l_j: S^1 \longrightarrow K_j$, $l_j(e^{2\pi i\sigma}) = \varphi(p_j, \varphi\sigma)$, $\sigma \in [0,1)$. l_j ist bijektiv und stetig, also ein Homöomorphismus.

Man überzeugt sich schnell, daß l_j sogar einen Isomorphismus zwischen φ_S und der Einschränkung φ_j von φ auf $K_j \times \mathbb{R}$ definiert. □

1.2 Bemerkungen:

(i) Ist $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine starkstetige C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum E mit der Eigenschaft $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ und $R(\lambda)$, $\lambda > \omega$, die Resolvente des Erzeugers, so ist $R(\lambda)$ genau dann ein kompakter Operator, wenn die Einheitskugel in der Graphennorm, d.h. die Menge $U_A := \{x \in \mathcal{D}(A) \mid \|x\| + \|Ax\| \leq 1\}$, relativ kompakt in E ist.

Beweis: Sei $U := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$. Einerseits gilt für $x \in U_A$, $x = R(\lambda)y$,

$$\|y\| = \|(\lambda - A)x\| \leq \lambda\|x\| + \|Ax\| \leq (\lambda + 1) ,$$

also $U_A \subset (\lambda + 1)R(\lambda)U$, und andererseits für $z \in U$

$$\|R(\lambda)z\|_A = \|R(\lambda)z\| + \|AR(\lambda)z\| \leq \|R(\lambda)z\| + \|\lambda R(\lambda)z\| + \|z\|$$

$$\leq \left(\frac{1}{\lambda - \omega} + \frac{\lambda}{\lambda - \omega} + 1\right)\|z\|$$

(Hille - Yosida), und folglich $R(\lambda)U \subset \alpha U_A$ für eine geeignet gewählte Zahl $\alpha > 0$.

(ii) Mit Hilfe der Bemerkung (i) läßt sich "geometrisch-intuitiv" das Theorem 1.4 recht gut verstehen. Wenn U_A in C(K) eine relativ kompakte Menge ist, dann ist U_A eine Menge gleichmäßig gleichgradig stetiger Funktionen (Arzelá- Ascoli) auf K. Stellt man sich die Trajektorien des Flusses nun wie mehr oder minder parallele Linien in einer Ebene vor, so kann es unter den Voraussetzungen von Theorem 1.4 nicht in jeder Umgebung einer solchen Linie eine weitere Trajektorie geben, denn sonst könnte man sich Funktionen konstruieren, die zwar entlang der Flußlinien "glatt", also aus U_A sind (vgl. auch (2.7)), senkrecht zu den Bahnen aber sich wild auf und ab bewegen. Eine solche Menge von Funktionen kann nicht gleichgradig stetig sein. Eine ähnliche Überlegung klärt, warum jeder stationäre Punkt isoliert sein muß.

§2 Verbandsgruppen mit kompakter Resolvente

$(A, \mathfrak{D}(A))$ sei der Erzeuger einer normbeschränkten, starkstetigen Halbgruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ auf einem Banachraum E und $R(\lambda) := (\lambda - A)^{-1}$ sei kompakt für ein $\lambda > 0$. Die Bahn $O(x) := \{T(t)x \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ist für jedes $x \in E$ zu-

nächst einmal beschränkt. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ folgt aus

$$O(x) = R(\lambda)O((\lambda - A)x)$$

sogar die Kompaktheit von $\overline{O(x)}$. Da der Unterraum $\{x \in E \mid O(x)$ relativ kompakt$\}$ für beschränkte Halbgruppen stets abgeschlossen ist (vgl. J.F.Berglund - K. H. Hofmann [1967]) , muß $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ relativkompakt in $\mathcal{L}_s(E)$ sein.Dieses Faktum, zusammen mit der Tatsache, daß jede Gruppe G, die als Menge in $\mathcal{L}_s(E)$ kompakt ist, eine topologische Gruppe bildet, wird einen der beiden Ausgangspunkte im Beweis des Hauptsatzes 2.5 darstellen. Die im Anschluß daran benötigten Ergebnisse aus der Theorie kompakter,abelscher Gruppen auf Banachräumen und Banachverbänden sind in den jetzt folgenden Sätzen und Bemerkungen zusammengefaßt worden.

Sei E ein komplexer Banachraum und $G \subset \mathcal{L}_s(E)$ eine kompakte,abelsche Gruppe (die im folgenden stets die identische Abbildung id enthalten möge). Die duale Gruppe von G werde mit $\hat{G}$ bezeichnet . Ferner sei

(2.0.1) $\mathcal{P} := \{(x,\chi) \in E \times \hat{G} \mid x \neq 0,\ \chi(T)x = Tx$ für alle $T \in G\}$

Bekanntlich ist das Bild $\mathcal{P}_1$ (bzw. $\mathcal{P}_2$) der Projektion von $\mathcal{P}$ auf die erste (bzw. zweite) Koordinatenmenge nicht dicht in E (bzw. verschieden von $\hat{G}$). Es gilt aber:

2.1 Satz: Sei E ein komplexer Banachraum und $G \subset \mathcal{L}_s(E)$ eine kompakte, abelsche Gruppe. Dann gilt:

(i) Der von $\mathcal{P}_1$ erzeugte Teilraum $\langle \mathcal{P}_1 \rangle$ ist dicht in E.

(ii) $\hat{G}$ wird von $\mathcal{P}_2$ erzeugt.

2.1 ist eine wohlbekannte Verallgemeinerung des Satzes über die Dichtheit des von den trigonometrischen Funktionen aufgespannten Teilraums in $C_{\mathbb{C}}(S^1)$.

Beweis: (i) siehe J. F. Berglund - K. H. Hofmann [1967], I.4.4, I.4.6.

"(ii)" Sei $\mathcal{A}(\mathcal{P}_2)$ die kleinste, $\mathcal{P}_2$ enthaltende, konjugationsinvariante, abgeschlossene Unteralgebra von $C_{\mathbb{C}}(G)$.

Lemma: $\mathcal{A}(\mathcal{P}_2) = C_{\mathbb{C}}(G)$.

Beweis: Für $x' \in E'$ sei $\Phi_{x'} : E \longrightarrow C_{\mathbb{C}}(G)$ die durch $\Phi_{x'}(x)(T) := \langle Tx, x' \rangle$, $x \in E$, $T \in G$, erklärte und wegen $\|\Phi_{x'}(x)\| \leq \sup_{T \in G} \|T\| \|x'\| \|x\|$ stetige Abbildung.

Nach Teil (i) ist $\langle \mathcal{P}_1 \rangle$ dicht in E. Sind also $S, T \in G$ und $S \neq T$, so gibt es nach dem Satz von Hahn - Banach $x \in \langle \mathcal{P}_1 \rangle$, $x' \in E'$ mit

$$\Phi_{x'}(x)(S) = \langle Sx, x' \rangle \neq \langle Tx, x' \rangle = \Phi_{x'}(x)(T) ,$$

d.h. $\bigcup_{x' \in E'} \Phi_{x'}(\langle \mathcal{P}_1 \rangle) = \bigcup_{x' \in E'} \langle \Phi_{x'}(\mathcal{P}_1) \rangle$ trennt die Punkte von G. Da $\Phi_{x'}(x) = \langle x, x' \rangle \gamma$ für $(x, \gamma) \in \mathcal{P}$ und damit $\Phi_{x'}(\mathcal{P}_1) \subset \mathcal{P}_2$ ist, muß auch $\langle \mathcal{P}_2 \rangle$, der von $\mathcal{P}_2$ erzeugte Unterraum, die Punkte trennen. Die Aussage des Lemmas folgt aus dem Satz von Stone - Weierstraß.

Sei nun μ das Haarmaß auf G und $\hat{H}$ die von $\mathcal{P}_2$ erzeugte Untergruppe. Angenommen, $\hat{H} \neq \hat{G}$. Ist dann $\gamma_0 \in \hat{G} \setminus \hat{H}$, so ist auch der konjugierte Charakter $\bar{\gamma}_0 \in \hat{G} \setminus \hat{H}$. Da $\int_G \gamma \bar{\gamma}_0 \, d\mu = 0$ gilt, für alle $\gamma \in G$, $\bar{\gamma} \neq \gamma_0$, muß die durch $f \longmapsto \int_G f \bar{\gamma}_0 \, d\mu$ auf $C_{\mathbb{C}}(G)$ definierte stetige Linearform auf $\mathcal{A}(\mathcal{P}_2)$ verschwinden. Aus dem Lemma ergibt sich $\gamma_0 = 0$, im Widerspruch zu $\gamma_0 \in \hat{G}$. □

2.2 Definition: E sei ein Banachverband und $H \subset \mathcal{L}_s(E)$ eine Halbgruppe. Ein abgeschlossenes Ideal I heiße H-invariant, wenn $TI \subset I$ für alle $T \in H$ gilt. Wenn es außer E und $\{0\}$ keine abgeschlossenen, invarianten Ideale gibt, dann nennt man H eine irreduzible Halbgruppe.

2.3 Beispiel: G sei eine kompakte (topologische) Gruppe mit Haarmaß μ.

Setze $E_p := L^p(G, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, und $E_0 := C(G)$.

Für $T \in G$ ist die durch

$$\mathcal{T}_{T,p}: E_p \longrightarrow E_p \quad , \quad \mathcal{T}_{T,p}x(S) := x(TS) \quad , \; x \in E_p \; , \; S \in G,$$

definierte (Links-)Rotation ein stetiger Operator auf E_p , $p \in \{0\} \cup [1,\infty)$. Die Gruppe $\{\mathcal{T}_{T,p} \mid T \in G\}$ aller (Links-)Rotationen auf E_p ist irreduzibel und kompakt in $\mathcal{L}_s(E_p)$.

R. Nagel und M.Wolff [1972] haben die irreduziblen, kompakten Gruppen positiver Operatoren auf Banachverbänden charakterisiert. Für das hier vorliegende Problem genügt die "abelsche Version":

2.4 Satz: Sei E ein Banachverband und $G \subset \mathcal{L}_s(E)$ eine abelsche, irreduzible Gruppe positiver Operatoren, die kompakt in $\mathcal{L}_s(E)$ ist. Bezeichnet μ das Haarmaß auf G und $J: C(G) \longrightarrow L^1(G,\mu)$ die kanonische Einbettung, so existieren injektive Verbandsoperatoren $J_1: C(G) \longrightarrow E$, $J_2: E \longrightarrow L^1(G,\mu)$ mit dichtem Bild, für die $J_1 \circ J_2 = J$ gilt und das folgende Diagramm für alle $T \in G$ kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} C(G) & \xrightarrow{J_1} & E & \xrightarrow{J_2} & L^1(G,\mu) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{T}_{T,0}} & & \downarrow{\scriptstyle T} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{T}_{T,1}} \\ C(G) & \xrightarrow[J_1]{} & E & \xrightarrow[J_2]{} & L^1(G,\mu) \end{array}$$

($\mathcal{T}_{T,0}$, $\mathcal{T}_{T,1}$ bezeichne die in 2.3 erklärten Rotationen).

Einen Beweis dieses Satzes findet man bei R. Nagel - M. Wolff [1972] oder auch bei H.H. Schaefer [1974], III. 10.4.

Ist $\varphi > 0$ und $\varphi_\varphi : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Rotationsfluß mit Periode φ (siehe I.3.1), so induziert φ_φ nicht nur eine Morphismengruppe $\{R_\varphi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ auf $C(S^1)$, sondern auch in der gleichen Weise kontraktive Verbandsgruppen $\{R_{\varphi,p}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ auf $L^p(S^1, \tilde{\mu})$, $1 \leq p < \infty$, wenn $\tilde{\mu}$ das Haarmaß auf S^1 bezeichnet. Die Resolventen $R(\lambda), \lambda > 0$, sind in diesen Fällen ebenfalls kompakt und die kanonische Injektion $\tilde{J}: C(S^1) \longrightarrow L^1(S^1, \tilde{\mu})$ erfüllt offenbar $\tilde{J} \circ R_\varphi(t) = R_{\varphi,1}(t) \circ \tilde{J}$.

Wir kommen zu dem wichtigsten Resultat des dritten Kapitels und formulieren dies unter Verwendung der eben eingeführten Bezeichnungen.

2.5 Theorem: Sei $(A, \mathcal{D}(A))$ der Erzeuger einer normbeschränkten Verbandsgruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ auf einem (komplexen) Banachverband $E \neq \{0\}$ und sei $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ kompakt für ein $\lambda > 0$. Dann zerfällt $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ in eine direkte Summe von endlichen vielen $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ -invarianten Projektionsbändern $E_i, i \in \{1, \ldots, n\}$.
Für festes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist entweder

a) $\dim E_i = 1$ und $T(t)\big|_{E_i} = id_{E_i}$ oder

b) es existieren injektive Verbandsoperatoren $\tilde{J}_1 : C(S^1) \longrightarrow E_i$, $\tilde{J}_2 : E_i \longrightarrow L^1(S^1,\tilde{\mu})$ mit dichtem Bild, für die $\tilde{J} = \tilde{J}_2 \circ \tilde{J}_1$ ist und das folgende Diagramm für ein geeignetes φ und für alle $t \in \mathbb{R}$ kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} C(S^1) & \xrightarrow{\tilde{J}_1} & E_i & \xrightarrow{\tilde{J}_2} & L^1(S^1,\tilde{\mu}) \\ \Big\downarrow R_\varphi(t) & & \Big\downarrow T(t)\big|_{E_i} & & \Big\downarrow R_{\varphi,1}(t) \\ C(S^1) & \xrightarrow[\tilde{J}_1]{} & E_i & \xrightarrow[\tilde{J}_2]{} & L^1(S^1,\tilde{\mu}) \end{array}$$

Beweis: O.B.d.A sei E komplex. Der Abschluß G von $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ in der starken Operatortopologie ist eine kompakte, abelsche Gruppe.

Die duale Gruppe $\hat{G}$ wird im Beweisgang eine wichtige Rolle spielen. Denn nach der Konstruktion der Zerlegung von E in G-invariante Projektionsbänder E_i und dem Nachweis der Irreduzibilität der auf E_i eingeschränkten Gruppen G_i (um 2.4 anwenden zu können), werden die dualen Gruppen $\hat{G}_i$ als trivial oder zu $\mathbb{Z}$ isomorph berechnet.

Sei also $\gamma \in \hat{G}$. Dann wird durch $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \longmapsto \gamma(T(t))$, ein stetiger Charakter auf $\mathbb{R}$ definiert.

Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, so ist auch $\tilde{\gamma}_1 \neq \tilde{\gamma}_2$. Die stetigen Charaktere auf $\mathbb{R}$ haben die Darstel-

lung $\tilde{\gamma}(t) = e^{2\pi i \varphi t}$ für ein wohlbestimmtes $\varphi \in \mathbb{R}$.
Für $\sigma \in \mathbb{R}_+$ definieren wir

$$C_\sigma := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid |\varphi| \leq \sigma, \text{es existiert } (x,\gamma) \in \mathcal{P} \text{ mit } \gamma(T(t)) = e^{2\pi i \varphi t}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Lemma 1: C_σ ist eine endliche Menge für alle $\sigma \geq 0$, und der Fixraum $F := \{x \in E \mid Tx = x \text{ für alle } T \in G\}$ ist ein endlichdimensionaler von $\{0\}$ verschiedener Vektorunterverband.

Beweis: Da die $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, Verbandsisomorphismen sind, ist F ein Vektorunterverband. Nach 2.1 (i) existiert ein Paar $(x,\gamma) \in \mathcal{P}$, und wegen
$T(t)|x| = |T(t)x| = |\gamma(T(t))x| = |x|$ ist $F \neq \{0\}$.
Ist nun $\gamma(T(t)) = e^{2\pi i \varphi t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$R(1)x = \int_0^\infty e^{-t} T(t)x \, dt = \int_0^\infty e^{-t} e^{2\pi i \varphi t} x \, dt = \frac{1}{1-2\pi i \varphi} x . \tag{2.5.1}$$

Aufgrund der Resolventengleichung ist mit $R(\lambda)$ auch $R(1)$ kompakt, d.h. $R(1)$ hat höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Eigenwerte, die sich möglicherweise in Null häufen. Aufgrund von $\left|\frac{1}{1-2\pi i \varphi}\right| \geq \left|\frac{1}{1-2\pi i \sigma}\right|$ für $\sigma \geq |\varphi|$ muß C_σ dann endlich sein. Da ferner die Eigenräume zu den Eigenwerten von $R(1)$ endlichdimensional sind, gilt dim $F < \infty$, und das Lemma ist bewiesen.

Zu einer Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ positiver Elemente von F, die paarweise zueinander orthogonal sind (d.h. $e_i \wedge e_j = 0$, $i \neq j$) , definiere $E_1,\dots,E_n$ als die von den e_i erzeugten abgeschlossenen Ideale. Die E_i sind G-invariant, zueinander orthogonal, und $\tilde{E} := E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ ist als Summe abgeschlossener Ideale wieder ein abgeschlossenes Ideal. Da für $(x,y) \in \mathcal{P}$ $|x| \in F$ gilt und $\langle \mathcal{P}_1 \rangle$ einen dichten Unterraum von E bildet, folgt $\tilde{E} = E$.

Lemma 2. Die Einschränkung $G_i = \overline{\{ T(t)|_{E_i} \mid t \in \mathbb{R} \}}^{\mathcal{L}_s(E_i)}$ von G auf E_i ist irreduzibel.

Beweis: Für ein abgeschlossenes, G_i-invariantes Ideal $I \subset E_i$, $I \neq \{0\}$ bilden die Einschränkungen $T(t)|_I$ der $T(t)$ auf I , $t \in \mathbb{R}$, eine normbeschränkte Verbandsgruppe mit kompakter Resolvente. Nach Lemma 1 enthält der zugehörige Fixraum mindestens ein positives Element, d.h. $e_i \in I$ und somit $I = E_i$.

Teil a) der Aussage ist damit klar. Im folgenden sei $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $\dim E_i > 1$. Die duale Gruppe $\hat{G}_i$ enthält aufgrund von Lemma 2 dann ein von id_{E_i} verschiedenes Element.

Lemma 3: Es existiert ein $\varphi > 0$ mit $T(\varphi)|_{E_i} = id_{E_i}$.

Beweis: Das von e_i erzeugte Hauptideal E_{e_i} ist mit der

Eichfunktion von $[-e_i, e_i]$ als Norm ein AM-Raum mit Einheit und deshalb nach dem Darstellungssatz von Kakutani (siehe H. H. Schaefer [1974], II.7.4) isomorph zu einem C(K). Elemente von E_{e_i} können unter dieser Identifizierung multipliziert werden, und die Restriktionen $T(t)|_{E_{e_i}}$ der T(t) auf E_{e_i} sind bezüglich dieser Multiplikation *-Automorphismen (siehe I.2.4).

Berücksichtigt man, daß für jedes $x \in \mathcal{P}_1 \cap E_i$ der Betrag $|x|$ aus $\langle e_i \rangle = \{\lambda e_i \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, d.h. $\mathcal{P}_1 \cap E_i \subset E_{e_i}$ ist, so muß mit zwei Paaren (x_1, γ_1), $(x_2, \gamma_2) \in \mathcal{P}$, $x_1, x_2 \in E_{e_i}$, wegen $|x_1 x_2^*| = |x_1||x_2| \neq 0$ auch $(x_1 x_2, \gamma_1 \bar{\gamma}_2) \in \mathcal{P}$ sein, wenn $\bar{\gamma}_2$ den zu γ_2 konjugierten Charakter bezeichnet. Demzufolge ist

$$\mathcal{P}_2(G_i) := \{\gamma \in \mathcal{P}_2 \mid \text{es existiert ein } x \in E_i \text{ mit } (x, \gamma) \in \mathcal{P}\}$$

eine Gruppe, d.h. $\mathcal{P}_2(G_i) = \hat{G}_i$, wenn man 2.1 (ii) berücksichtigt.

Setze

$$C_\sigma(G_i) = \{\varphi \in C_\sigma \mid |\varphi| \leq \sigma, \text{ es existiert } \gamma \in \mathcal{P}_2(G_i) \text{ mit } \gamma(T(t)) = e^{2\pi i \varphi t}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Nach Lemma 1 ist $C_\sigma(G_i) \subset C_\sigma$ endlich, und aufgrund der eben angestellten Überlegungen bildet $\bigcup_{\sigma > 0} C_\sigma(G_i) \simeq \mathcal{P}_2(G_i) = \hat{G}_i$ eine nichttriviale, ad-

ditive, diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine reelle Zahl $t_o > 0$, die diese Untergruppe erzeugt, d.h. $\{nt_o \mid n \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{\sigma>0} C_\sigma(G_i)$. Für den stetigen Charakter $\gamma_o \in \hat{G}_i$, $T(t)|_{E_i} \longmapsto e^{2\pi i t t_o}$, $t \in \mathbb{R}$, gilt

$$\hat{G}_i = \mathcal{P}_2(G_i) = \{\gamma_o^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{und}$$

$$T(\tfrac{1}{t_o})x = \gamma(T(\tfrac{1}{t_o}))x = x$$

für alle $x \in \mathcal{P}_1 \cap E_i$.

2.1 (i) liefert die Behauptung von Lemma 3 (**setze** $\varphi := \frac{1}{t_o}$).

Aus Lemma 3 folgt $G_i = \{T(t) \mid 0 \leq t < \varphi\}$.

Wendet man nun 2.4 auf die Gruppe G_i an und definiert für $t \in [0,\varphi)$

$$\hat{J}_1 : C(S^1) \longrightarrow C(G_i) \quad , \quad \hat{J}_1 x(T(t)|_{E_i}) := x(e^{2\pi i \frac{t}{\varphi}}) \quad , x \in C(G_i) \ ,$$

$$\hat{J}_2 : L^1(G_i,\mu) \longrightarrow L^1(S^1,\tilde{\mu}), \ \hat{J}_2 y(e^{2\pi i \frac{t}{\varphi}}) := y(T(t)|_{E_i}) , y \in L^1(G_i,\mu)$$

so lassen sich die unter b) von $\tilde{J}_1 := J_1 \circ \hat{J}_1$ und $\tilde{J}_2 := \hat{J}_2 \circ J_2$ behaupteten Eigenschaften unmittelbar nachrechnen.

□

§3 Relativ kompakte irreduzible Morphismengruppen

Im Anschluß an die Charakterisierungen der letzten beiden Paragraphen ist es natürlich, nach dem "Aussehen" von relativ kompakten, irreduziblen Verbandsgruppen $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ zu fragen. Eine Teilantwort wurde schon durch die Betrachtung von $G := \overline{\{T(t) \mid t\in\mathbb{R}\}}^{\mathcal{L}_s(E)}$ in 2.4 gegeben. G ist dann eine solenoidale Gruppe (vgl. E. Hewitt - K. A. Ross [1963]) und als solche isomorph zu einer Quotientengruppe der dualen Gruppe von $\mathbb{R}_d$, den reellen Zahlen versehen mit der diskreten Topologie, wie bereits im Jahre 1943 in einer Arbeit von H. Ansai - S. Kakutani nachgewiesen wurde. In manchen "Spezialfällen" (siehe 3.2) lassen sich noch schärfere Antworten geben.

Sei $T^n := \underbrace{S^1 x \ldots x S^1}_{n\text{-mal}}$ der n-dimensionale Torus. Sei $\psi: \mathbb{R} \longrightarrow T^n$ ein stetiger Homomorphismus. Betrachtet man $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$, so ist das Bild von $\mathbb{R}$ unter ψ genau dann dicht, wenn es über dem Körper $\mathbb{Q}$ linear unabhängige Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt, die $\psi(t) = (e^{2\pi i t\alpha_1},\ldots,e^{2\pi i t\alpha_n})$ für alle $t\in\mathbb{R}$ erfüllen (siehe z.B. Arnold - Avez [1968]).

3.1 Beispiel: Sei $\psi: \mathbb{R} \longrightarrow T^n$, $\psi(t) = (e^{2\pi i t\alpha_1},\ldots,e^{2\pi i t\alpha_n})$, ein injektiver, stetiger Homomorphismus mit dichtem

Bild. Die Abbildung

$$\varphi : T^n \times \mathbb{R} \longrightarrow T^n$$

$$((e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n}), t) \longmapsto (e^{2\pi i (t_1 + t\alpha_1)}, \ldots, e^{2\pi i (t_n + t\alpha_n)})$$

definiert einen Fluß, und für alle $p \in T^n$ ist die Menge $\{\varphi(p,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ dicht in T^n, d.h. die von φ induzierte Morphismengruppe $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ irreduzibel (vgl. Schaefer [1974], III. 8 Beispiel 5).

Lemma: $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ ist relativ kompakt in $\mathcal{L}_s(C(T^n))$.

Beweis: Es genügt, zu zeigen, daß die Bahnen $\{S(t)x \mid t \in \mathbb{R}\}$ relativ kompakt in der Normtopologie für eine dichte Teilmenge von $C(T^n)$ sind (siehe J. F. Berglund - K. H. Hofmann [1967], I.2.3)

Die $*$-Unteralgebra $C^1(T^n)$ aller $x \in C(T^n)$, für welche die auf $[0,1]^n$ definierte Abbildung

$$\tilde{x}: (t_1, \ldots, t_n) \longmapsto x(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n})$$

eine stetige Ableitung $\tilde{x}'$ hat, ist dicht in $C(T^n)$. Da ferner mit $x \in C^1(T^n)$ auch $S(t)x \in C^1(T^n)$, $t \in \mathbb{R}$, ist und für ein festes $y \in C^1(T^n)$ die Menge $\{\widetilde{(S(t)y)}' \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine beschränkte Teilmenge von $C([0,1]^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n))$

bildet, ist aufgrund des Mittelwertsatzes die Menge $\{S(t)x \mid t \in \mathbb{R}\}$ gleichmäßig gleichgradig stetig und folglich nach dem Satz von Arzelá-Ascoli relativ kompakt in der Normtopologie. □

3.2 Satz: Sei K eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n . Sei $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine irreduzible in $\mathcal{L}_s(C(K))$ relativ kompakte Morphismengruppe. Dann existieren über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige, reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ derart, daß $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, die zu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in 3.1 konstruierte Morphismengruppe auf $C(T^n)$, zu $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ isomorph (siehe I.4.3) ist.

Beweis: Der Abschluß G von $\{T(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ in der starken Operatortopologie ist eine irreduzible, kompakte, abelsche Gruppe und nach einem wohlbekannten Satz homöomorph zu K (vgl. 2.4 oder genauer H. H. Schaefer [1974], III.10.2). Dann ist G aber als topologische Gruppe isomorph zu einer Liegruppe $\tilde{G}$ (vgl. Hilberts 5. Problem, z.B. D. Montgomery - L. Zippin [1964]). Da G eine einparametrige, dichte Untergruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ besitzt, muß G und damit $\tilde{G}$ zusammenhängend sein. G ist also eine zusammenhängende, kompakte, n-dimensionale, abelsche Liegruppe und folglich (als Liegruppe) isomorph zum Torus T^n (vgl. z.B. Y. Matsu-

shima [1972], IV. 16.2).

Ist $l: G \longrightarrow T^n$ der Isomorphismus, so ist $t \longmapsto l(T(t))$ ein stetiger Homomorphismus mit dichtem Bild von $\mathbb{R} \longrightarrow T^n$ und muß nach den einführenden Bemerkungen die Form $\varphi(t) = (e^{2\pi i t\alpha_1}, \ldots, e^{2\pi i t\alpha_n})$ für über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige, reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ haben. Die Behauptung folgt durch einfaches Nachrechnen.

□

Literaturverzeichnis

Anzai, H. und S. Kakutani

(1943) Bohr compactifications of a locally compact abelian group. I, II Proc. Imp. Acad. Tokyo 19, 476 - 480, 533 - 539 (1943).

Arnold, V.I. und A. Avez

(1968) Ergodic Problems of Classical Mechanics. New York: W. A. Benjamin 1968.

Batty, C. J. K.

(1979) Unbounded derivations of commutative C^*-algebras. Preprint.

Berglund, J.E. und K.H. Hofmann

(1967) Compact Semitopological Semigroups and Weakly Almost Periodic Functions. Lecture Notes in Math. 42, Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1967.

Day, M.M.

(1973) Normed Linear Spaces, 2^{nd} edition. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1973.

Derndinger R. und R. Nagel

(1979) Der Generator starkstetiger Verbandshalbgruppen auf C(X) und dessen Spektrum. Preprint.

Dunford, N. und J.T. Schwartz

(1958) Linear Operators. Part I: General Theory. New York: Wiley 1958.

Goodman, F.

(1979) Closed $*$-derivations in C(I), C(T) and $C_o(\mathbb{R})$. Preliminary Report.

Herman, R.H. und O. Takenouchi

(1979) Extensions of $\frac{d}{dx}$. Preprint.

Hewitt, E. und K.A. Ross

(1963) Abstract Harmonic Analysis, Berlin - Göttingen - Heidelberg: Springer 1963.

Hille, E. und R.S. Phillips

(1965) Functional Analysis and Semi-Groups. 2^{nd} print, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1965.

Hirsch, M.

(1976) Differential Topology. Graduate Texts in Mathmatics: Springer 1976.

Jean, M.

(1976) Some Complete Lattices of $W^{1,p}(\Omega)$. Bolletino U.M.I. (5) 13-A (1976), 186 - 195.

Johnson, B.E.

(1969) Continuity of Derivations on commutative algebras. Amer. J. Math. 91 (1969), 1 - 10.

Kato, T.

(1966) Pertubation Theory for Linear Operators. Springer - Verlag, New York (1966).

Lin, M., J. Montgomery und R. Sine

(1977) Change of Velocity and Ergodicity in Flows and Markov Semigroups. Z. Wahrsch.theorie 39, 197 - 211, (1977).

Matsushima, Y.

(1972) Differentiable Manifolds. Marcel Dekker. Inc. New York 1972.

Montgomery, D. und L. Zippin

(1964) Topological Transformation Groups. Interscience Publishers, Inc., New York (1964).

Nagel, R. und M. Wolff

(1972) Abstract dynamical systems with an application to operators with discrete spectrum. Arch. Math. 23, 170 - 176 (1972).

Pazy, A.

(1974) Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. University of Maryland, Lecture Note # 10, 1974.

Peixoto, M. M.

(1959) On Structural Stability.Annals of Math. Vol. 69, No 1. January 1959.

Roth, J.P.

(1976) Opérateurs Dissipatifs et Semi-Groupes dans les espaces de fonctions continues. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 26, 4 (1976), 1 - 97.

Sakai, S.

(1977a) Recent Developments in the Theory of Unbounded Derivations in C^*-Algebras. Lecture Notes in Math. 650, Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1977.

(1977b) The Theory of Unbounded Derivations in C^*-Algebras. Københavns Universitet, Preprint Series Nr. 27, 1977.

Schaefer, H. H.

(1966) Topological Vector Spaces. 3rd print, Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1971.

(1974) Banach Lattices and Positive Operators. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1974.

Wolff, M.

(1978) On C_o-Semigroups of Lattice Homomorphisms on a Banach Lattice. Math. Z. 164, 69 - 80 (1978).

Yosida, K.

(1968) Functional Analysis. 2nd edition. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1968.

Lebenslauf

Am 5.3.1948 wurde ich, Heinrich, Friedrich, Ewald Uhlig, als Sohn des Kinderarztes Dr. Heinrich Uhlig und seiner Ehefrau Ellinor, geb. Rohde, in Greifswald geboren.

1954	Einschulung in Luckenwalde.
1960 - 1961	Besuch des Kant Gymnasiums in Karlsruhe.
1961 - 1967	Schüler des Justus Knecht Gymnasiums.
1967	Reifeprüfung.
1967 - 1969	Wehrdienst.
1969 - 1971	Studium der Mathematik in Hamburg bis zum Vordiplom.
1972 - 1974	Fortsetzung des Studiums in Tübingen bis zum Diplom.
1975 - 1976	Stipendiat des DAAD am Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN in México, D. F..
1967 - 1979	Anfertigung der vorliegenden Arbeit über "Derivationen und Verbandshomomorphismen" unter der Anleitung von Herrn Professor Dr. Rainer Nagel.

Meine akademischen Lehrer waren in Hamburg die Herren Professoren Benz, Collatz, Feldmann, Hinderer, Kähler, Werner, in Mexiko Kupka, Verjovsky und in Tübingen Beekmann, de Groote, Güttinger, Hähl, Hahn, Kaul, Nagel, Pfaffelhuber, Schaefer, Wolff.